

ECUACIONES DE UNA RECTA EN EL PLANO

Ecuación vectorial

La **ecuación vectorial** de la recta que pasa por el punto A y tiene la dirección del vector \vec{v} es $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{v}$ con $t \in \mathbb{R}$ y X un punto genérico de la recta. Al vector \vec{v} se le llama **vector direccional** de la recta.

Ejemplo 2: La ecuación vectorial de la recta que pasa por $A = (3, -2)$ y tiene como vector direccional $\vec{v} = (1, 4)$ es $(x, y) = (3, -2) + t \cdot (1, 4)$

Ecuación general

La **ecuación general** de una recta en el plano es $ax + by = c$ siendo a, b, c números reales y las variables x e y las coordenadas de un punto cualquiera de la recta.

Así, un punto (x, y) del plano pertenece a la recta si verifica la ecuación.

Ejemplo 3: Para comprobar si los puntos $A = (0, -4)$, $B = (2, 1)$ y $C = (2, -1)$ pertenecen a la recta $3x - 2y = 8$, sustituimos las coordenadas de cada punto en la ecuación.

- * Punto A: $3 \cdot 0 - 2 \cdot (-4) = 8$, por tanto, A pertenece a la recta.
- * Punto B: $3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 6 - 2 = 4 \neq 8$, por tanto, B no pertenece a la recta.
- * Punto C: $3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 6 + 2 = 8$, por tanto, C pertenece a la recta.

Otras ecuaciones de una recta

Una recta viene determinada por "un punto y un vector direccional", por "dos puntos distintos" o por "un punto y la pendiente". Veamos a continuación como, a partir de estas distintas formas de determinación, se puede escribir su ecuación.

- *Ecuación de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y es paralela al vector no nulo (a, b)*
 - Si a y b son números reales no nulos la ecuación es $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$
 - Si $a = 0$ la ecuación de la recta es $x = x_0$, ya que es una recta en la dirección del vector $(0, b)$, es decir, vertical.
 - Si $b = 0$ la ecuación de la recta es $y = y_0$, ya que es una recta en la dirección del vector $(a, 0)$, es decir, horizontal.

Ejemplo 4: La ecuación de la recta que pasa por el punto $(4, -2)$ y es paralela al vector $(1, 5)$ es $\frac{x - 4}{1} = \frac{y + 2}{5}$

- *Ecuación de la recta que pasa por dos puntos distintos (x_0, y_0) y (x_1, y_1)*

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

Nótese que si algún denominador es cero la ecuación de la recta se obtiene igualando el numerador correspondiente a cero, por la misma causa que en el apartado anterior.

Ejemplo 5:

a) La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(4, -2)$ y $(-1, 3)$ es $\frac{x-4}{-1-4} = \frac{y+2}{3+2}$

b) La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0, -2)$ y $(6, -2)$ viene dada por $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y+2}{-2+2}$, pero al ser cero el denominador de la segunda fracción, la ecuación de la recta es $y + 2 = 0$, es decir, $y = -2$.

• Ecuación de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene por pendiente m

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ejemplo 6: La ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, -4)$ y tiene por pendiente 2 es $y + 4 = 2(x - 1)$

En ocasiones es interesante considerar la ecuación de una recta como una función, para ello se considera la **ecuación explícita**, con la variable y despejada, que tiene la forma $y = mx + b$, donde m es la pendiente y b la ordenada para $x = 0$. Esta ecuación explícita no existe para rectas verticales, es decir, para rectas cuya ecuación general es de la forma $x = k$, con k un número real. Nótese que estas rectas tienen la inclinación igual a 90° y la pendiente es infinito (o no existe).

Para representar gráficamente una recta, lo más sencillo es obtener dos puntos que pertenezcan a ella.

Ejemplo 7: Dada la recta $3x - 2y = 8$ los puntos que se obtienen para $x = 0$ y $x = 2$ son $(0, -4)$ y $(2, -1)$, por tanto, su gráfica es

