LECCIÓN CONDENSADA

7.1 Grado polinomial y diferencias finitas

En esta lección

- Aprenderás la terminología asociada con los **polinomios**
- Usarás el **método de diferencias finitas** para determinar el **grado** de un polinomio
- Encontrarás una **función polinomial** que **modele** un conjunto de datos

Un polinomio con solamente una variable es cualquier expresión que se puede escribir de la forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x^1 + a_0$$

donde x es una variable, los exponentes son números enteros no negativos, y los coeficientes son números reales. Una función de la forma $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x^1 + a_0$ es una **función polinomial.**

El **grado** de un polinomio o de una función polinomial es la potencia del término que posee el exponente mayor. Si los grados de los términos de un polinomio disminuyen de izquierda a derecha, el polinomio se encuentra en la **forma general.** Los polinomios siguientes están en la forma general.

1^er^ grado	**2^do^ grado**	**3^er^ grado**	**4^to^ grado**
$3x - 7$	$-x^2 + 2x - 1.8$	$9x^3 - 4x^2 + x + 11$	$-5x^4$

Un polinomio con un solo término, como $-5x^4$, se llama un **monomio.** Un polinomio con dos términos, como $3x - 7$, se llama un **binomio.** Un polinomio con tres términos, como $-x^2 + 2x - 1.8$, se llama un **trinomio.** Los polinomios con más de tres términos, como $9x^3 - 4x^2 + x + 11$, por lo general se llaman simplemente polinomios.

En las funciones lineales, cuando los valores x están espaciados de manera uniforme, las diferencias entre los correspondientes valores y son constantes. Esto no es cierto para las funciones polinomiales de grado superior. Sin embargo, para los polinomios de segundo grado, las diferencias entre las diferencias, llamadas *segundas diferencias* y abreviadas como D_2, son constantes. Para los polinomios de tercer grado, las diferencias entre las segundas diferencias, llamadas *terceras diferencias* y abreviadas como D_3, son constantes. Esto se ilustra en las tablas en la página 361 de tu libro.

Si tienes un conjunto de datos con valores x igualmente espaciados, puedes encontrar el grado de la función polinomial que se ajusta a los datos (si existe una función polinomial que se ajuste a los datos) analizando las diferencias entre los valores y. El ejemplo en tu libro ilustra esta técnica, que se llama el **método de diferencias finitas.** Lee dicho ejemplo atentamente. Observa que el método de diferencias finitas sólo determina el grado del polinomio. Para hallar la ecuación exacta para la función polinomial, necesitas encontrar los coeficientes, resolviendo un sistema de ecuaciones o usando algún otro método.

En el ejemplo, los valores D_2 son iguales. Cuando utilizas datos experimentales, tal vez tengas que conformarte con diferencias que son casi iguales.

(continúa)

Investigación: Caída libre

Paso 1 Si tienes un sensor de movimiento, reúne los datos (*tiempo, altura*) como se describe en el Paso 1 en tu libro. Si no, usa esta muestra de datos. (Los valores de las dos últimas columnas se calculan en el Paso 2.)

Completa los Pasos 2 a 6 en tu libro. Los resultados dados están basados en la muestra de datos.

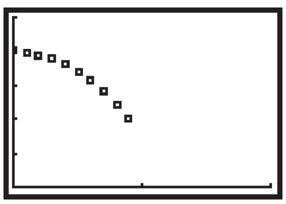
Paso 2 Las primeras y segundas diferencias, D_1 y D_2, se muestran en esta tabla.

Para estos datos, podemos detenernos en las segundas diferencias porque son casi constantes.

Paso 3 Las tres gráficas se muestran a continuación.

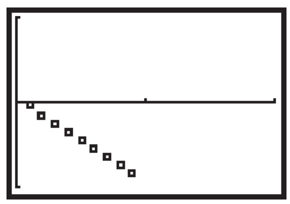
Tiempo (s) x	Altura (m) y	D_1	D_2
0.00	2.000		
0.05	1.988	−0.012	
0.10	1.951	−0.037	−0.025
0.15	1.890	−0.061	−0.024
0.20	1.804	−0.086	−0.025
0.25	1.694	−0.110	−0.024
0.30	1.559	−0.135	−0.025
0.35	1.400	−0.159	−0.024
0.40	1.216	−0.184	−0.025
0.45	1.008	−0.208	−0.024

(L1, L2)



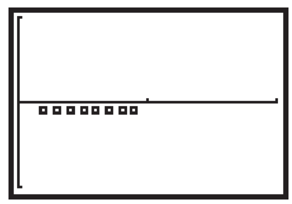
[0, 1, 0.5, 0, 2.5, 0.5]

(L3, L4)



[0, 1, 0.5, −0.25, 0.25, 0.25]

(L5, L6)



[0, 1, 0.5, −0.25, 0.25, 0.25]

Paso 4 La gráfica de (L1, L2) parece ser parabólica, lo que sugiere que el modelo correcto puede ser una función polinomial de 2do grado. La gráfica de (L3, L4) muestra que las primeras diferencias no son constantes, pues disminuyen de forma lineal. La gráfica de (L5, L6) muestra que las segundas diferencias son casi constantes, así que el modelo correcto debe ser una función polinomial de 2do grado.

Paso 5 Un polinomio de segundo grado de la forma $y = ax^2 + bx + c$ se ajusta a los datos.

Paso 6 Para escribir el sistema, escoge tres puntos. Por cada punto, escribe una ecuación sustituyendo los valores x y y por los valores del tiempo y de la altura en la ecuación $y = ax^2 + bx + c$. El siguiente sistema se basa en los valores (0, 2), (0.2, 1.804), y (0.4, 1.216).

$$\begin{cases} c = 2.000 \\ 0.04a + 0.2b + c = 1.804 \\ 0.16a + 0.4b + c = 1.216 \end{cases}$$

Una manera de resolver este sistema es escribir la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.04 & 0.2 & 1 \\ 0.16 & 0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.000 \\ 1.804 \\ 1.216 \end{bmatrix}$$

y resolverla con una matriz inversa. La solución es $a = -4.9$, $b = 0$, y $c = 2$, de modo que la ecuación que se ajusta a los datos es $y = -4.9x^2 + 2$.

LECCIÓN CONDENSADA

7.2 Formas cuadráticas equivalentes

En esta lección

- Aprenderás sobre la **forma de vértice** y la **forma factorizada** de una ecuación cuadrática, y sobre la información que cada forma proporciona relacionada a la gráfica
- Usarás la **propiedad del producto cero** para hallar las **raíces** de una ecuación factorizada
- Escribirás un **modelo cuadrático** para un conjunto de datos en las formas de vértice, general, y factorizada

Una función polinomial de 2do grado se llama una **función cuadrática.** En la Lección 7.1, aprendiste que la **forma general** de una función cuadrática es $y = ax^2 + bx + c$. En esta lección exploras otras formas de una función cuadrática.

Sabes que cada función cuadrática es una transformación de $y = x^2$. Cuando una función cuadrática se escribe de la forma $\frac{y-k}{a} = \left(\frac{x-h}{b}\right)^2$ ó $y = a\left(\frac{x-h}{b}\right)^2 + k$, sabes que el vértice de la parábola es (h, k) y que los factores de escala vertical y horizontal son a y b. A la inversa, si conoces el vértice de una parábola y conoces (o puedes hallar) los factores de escala, entonces puedes escribir su ecuación en una de estas formas.

La función cuadrática $y = a\left(\frac{x-h}{b}\right)^2 + k$ se puede reescribir de la forma $y = \frac{a}{b^2}(x-h)^2 + k$. El coeficiente $\frac{a}{b^2}$ combina los dos factores de escala en un factor de escala vertical. En la **forma de vértice** de una ecuación cuadrática, $y = a(x-h)^2 + k$, este único factor de escala se denota simplemente con a. De esta forma puedes identificar el vértice, (h, k), y el factor de escala vertical, a. Si conoces el vértice de una parábola y el factor de escala vertical, puedes escribir una ecuación en forma de vértice.

La **propiedad del producto cero** establece que para todos los números reales a y b, si $ab = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$, o alternativamente $a = 0$ y $b = 0$. Por ejemplo, si $3x(x-7) = 0$, entonces $3x = 0$ ó $x - 7 = 0$. Por tanto, $x = 0$ ó $x = 7$. Las soluciones de una ecuación de la forma $f(x) = 0$ se llaman las **raíces** de la ecuación, de modo que 0 y 7 son las raíces de $3x(x-7) = 0$.

Las intersecciones x de una función también se llaman los **ceros** de la función (porque los valores y son 0). Se dice que la función $y = -1.4(x-5.6)(x+3.1)$, en el Ejemplo A de tu libro, está en **forma factorizada** porque se escribe como el producto de factores. Los ceros de la función son las soluciones de la ecuación $-1.4(x-5.6)(x+3.1) = 0$. En el Ejemplo A se muestra cómo puedes usar la propiedad del producto cero para hallar los ceros de la función.

En general, la forma factorizada de una función cuadrática es $y = a(x - r_1)(x - r_2)$. En esta forma puedes identificar las intersecciones x (o ceros), r_1 y r_2, y el factor de escala vertical, a. A la inversa, si conoces las intersecciones x de una parábola y conoces (o puedes hallar) el factor de escala vertical, entonces puedes escribir la ecuación en forma factorizada. Lee el Ejemplo B atentamente.

Investigación: Rodando

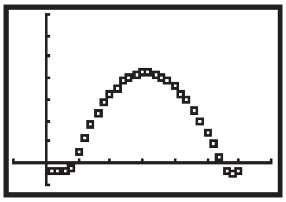
Lee Procedure Note (la nota de procedimiento) y los Pasos 1–3 en tu libro. Asegúrate de que puedes imaginar cómo funciona el experimento. Usa esta

(continúa)

muestra de datos para completar los Pasos 4–8, y después compara tus resultados con los siguientes. (Se han ajustado estos datos a la posición de la línea de inicio, como se describe en el Paso 3.)

Tiempo (s) x	Distancia desde la línea (m), y	Tiempo (s) x	Distancia desde la línea (m), y	Tiempo (s) x	Distancia desde la línea (m), y
0.2	−0.357	2.2	3.570	4.2	3.309
0.4	−0.355	2.4	3.841	4.4	2.938
0.6	−0.357	2.6	4.048	4.6	2.510
0.8	−0.184	2.8	4.188	4.8	2.028
1.0	0.546	3.0	4.256	5.0	1.493
1.2	1.220	3.2	4.257	5.2	0.897
1.4	1.821	3.4	4.193	5.4	0.261
1.6	2.357	3.6	4.062	5.6	−0.399
1.8	2.825	3.8	3.871	5.8	−0.426
2.0	3.231	4.0	3.619	6.0	−0.419

Paso 4 He aquí una gráfica de los datos, que tienen una forma parabólica. Pueden modelarse con una función cuadrática. Ignorando los primeros y los últimos datos (cuando la lata empieza a moverse y cuando se detiene), las segundas diferencias, D_2, son casi constantes, lo cual implica que un modelo cuadrático es apropiado.



$[-1, 7, 1, -1, 7, 1]$

Paso 5 Las coordenadas del vértice son (3.2, 4.257). Considera (5.2, 0.897) como la imagen de (1, 1). Las distancias horizontal y vertical de (1, 1) desde el vértice de $y = x^2$ son ambas 1. La distancia horizontal de (5.2, 0.897) desde el vértice, (3.2, 4.257), es 2 y la distancia vertical es −3.36. Así pues, los factores de escala horizontal y vertical son 2 y −3.36, respectivamente. Esto se puede representar como el factor de escala vertical $\frac{-3.36}{2^2} = -0.84$. Por tanto, la forma de vértice de un modelo de los datos es $y = -0.84(x - 3.2)^2 + 4.527$.

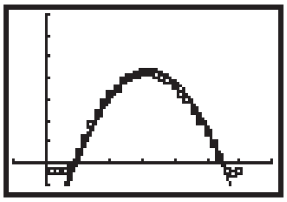
Paso 6 Sustituyendo los puntos (1, 0.546), (3, 4.256), y (5, 1.493) en la forma general, $y = ax^2 + bx + c$, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} a + b + c = 0.546 \\ 9a + 3b + c = 4.256 \\ 25a + 5b + c = 1.493 \end{cases}$$

La solución de este sistema es $a \approx -0.81$, $b \approx 5.10$, y $c \approx -3.74$, de modo que la forma general de la ecuación es $y = -0.81x^2 + 5.10x - 3.74$.

Paso 7 Las intersecciones x están en aproximadamente (0.9, 0) y (5.5, 0). El factor de escala, hallado en el Paso 5, es −0.84. De modo que la forma factorizada de la ecuación es $y = -0.84(x - 0.9)(x - 5.5)$.

Paso 8 Utilizas la forma de vértice cuando conoces el vértice y el factor de escala, o el vértice y algún otro punto que puedas usar para determinar el factor de escala. Utilizas la forma general cuando conoces cualesquiera tres puntos. Utilizas la forma factorizada cuando conoces las intersecciones x y al menos un punto para determinar el factor de escala.



$[-1, 7, 1, -1, 7, 1]$

LECCIÓN CONDENSADA

7.3 Completar el cuadrado

En esta lección

- Usarás el método de **completar el cuadrado** para hallar el vértice de una parábola cuya ecuación se da en forma general
- Resolverás problemas que implican el **movimiento de proyectiles**

Muchos problemas reales implican encontrar el valor **mínimo** o **máximo** de una función. Para las funciones cuadráticas, el valor máximo o mínimo se presenta en el vértice. Si tienes una ecuación en forma de vértice, fácilmente puedes hallar las coordenadas del vértice de una parábola. También es bastante sencillo hallar el vértice si la ecuación está en la forma factorizada. La cosa se complica si la ecuación está en forma general. En esta lección aprenderás una técnica para convertir una ecuación cuadrática de la forma general a su forma de vértice.

El **movimiento de proyectiles**—el lanzamiento o la caída de objetos bajo la influencia de la gravedad—puede modelarse mediante funciones cuadráticas. La altura de un proyectil depende de la altura de que se tiró, la velocidad hacia arriba con que se tiró, y el efecto de la gravedad en el objeto. La altura se puede modelar por la función

$$y = -\frac{1}{2}gx^2 + v_0x + s_0$$

donde x es el tiempo en segundos, y es la altura (en metros o en pies), g es la aceleración debida a la gravedad (9.8 m/s^2 ó 32 pies/s^2), v_0 es la velocidad inicial hacia arriba del objeto (en m/s o pies/s), y s_0 es la altura inicial del objeto (en metros o en pies).

Lee el Ejemplo A en tu libro, que ilustra cómo escribir una ecuación de movimiento de proyectil cuando conoces solamente las intersecciones x (las dos ocasiones en que la altura es 0) y cómo usar las intersecciones x para encontrar las coordenadas del vértice. Es importante entender que la coordenada x del vértice de la parábola es la media de las intersecciones x. Este hecho te permite hallar el vértice de una parábola a partir de la forma factorizada de su ecuación.

Observa los diagramas correspondientes a $(x + 5)^2$ y $(a + b)^2$ en tu libro. Asegúrate de entender el patrón descrito después de los diagramas.

Investigación: Completa el cuadrado

Completa la investigación en tu libro. Cuando hayas terminado, compara tus respuestas con las siguientes.

Paso 1

a. Debes sumar 9.

b. $x^2 + 6x = x^2 + 6x + 9 - 9 = (x + 3)^2 - 9$

c. Introduce $x^2 + 6x$ como Y1 y $(x + 3)^2 - 9$ como Y2, y verifica que los valores de la tabla o las gráficas son las mismas para ambas expresiones.

Paso 2

a. 9

b. $x^2 + 6x - 4 = x^2 + 6x + 9 - 9 - 4 = (x + 3)^2 - 13$

c. Introduce $x^2 + 6x - 4$ como Y1 y $(x + 3)^2 - 13$ como Y2, y verifica que los valores de la tabla o las gráficas son las mismas en ambas expresiones.

(continúa)

Lección 7.3 • Completar el cuadrado (continuación)

Paso 3

a. Pon la atención en $x^2 - 14x$. Para completar un cuadrado perfecto, necesitas sumar 49. (Esto resulta en una expresión de la forma $a^2 + 2ab + b^2$, donde $a = x$ y $b = -7$.) Necesitas restar 49 para compensar. Así pues,

$$x^2 - 14x + 3 = x^2 - 14x + 49 - 49 + 3 = (x - 7)^2 - 46$$

b. Para hacer $x^2 + bx$ un cuadrado perfecto, debes sumar $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ó $\frac{b^2}{4}$. Necesitas restar $\frac{b^2}{4}$ para compensar. Así pues,

$$x^2 - bx + 10 = x^2 - bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + 10 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(10 + \frac{b^2}{4}\right)$$

Paso 4

a.
$$\begin{aligned} 2x^2 - 6x + 1 &= 2\left(x^2 - 3x\right) + 1 && \text{Factoriza } 2x^2 + 6x. \\ &= 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - 2\left(\frac{9}{4}\right) + 1 && \text{Completa el cuadrado. Debido a que sumas } 2 \cdot \tfrac{9}{4}\text{, debes restar } 2 \cdot \tfrac{9}{4}. \\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{2} && \text{Escribe la expresión en la forma } a(x-h)^2 + k. \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} ax^2 + 10x + 7 &= a\left(x^2 + \frac{10}{a}x\right) + 7 && \text{Factoriza } ax^2 + 10x. \\ &= a\left(x^2 + \frac{10}{a}x + \frac{25}{a^2}\right) - a\left(\frac{25}{a^2}\right) + 7 && \text{Completa el cuadrado. Debido a que sumas } a \cdot \tfrac{25}{a^2}\text{, debes restar } a \cdot \tfrac{25}{a^2}. \\ &= a\left(x + \frac{5}{a}\right)^2 + \left(7 - \frac{25}{a}\right) && \text{Escribe la expresión de la forma } a(x-h)^2 + k. \end{aligned}$$

Paso 5

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \end{aligned}$$

Paso 6 Usando los resultados del Paso 5, puedes escribir $y = ax^2 + bx + c$ como $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$. Esto está en forma de vértice, $y = a(x - h) + k$, en la que $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = c - \frac{b^2}{4a}$. Así que el vértice es $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

Debido a tu trabajo en la investigación, ahora conoces dos formas de encontrar el vértice, (h, k), de una función cuadrática dada en forma general, $y = ax^2 + bx + c$.

1. Puedes usar el proceso de **completar cuadrados** para reescribir la ecuación en forma de vértice, $y = a(x - h)^2 + k$, y después leer el vértice en la ecuación modificada.
2. Puedes usar las fórmulas $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = c - \frac{b^2}{4a}$ para calcular las coordenadas del vértice directamente.

Puedes usar cualquiera de los dos métodos, pero asegúrate de conocer bien la técnica de completar cuadrados, pues tendrás que utilizarla en tu trabajo futuro. En el Ejemplo B en tu libro se muestran ambos métodos. Trabaja ese ejemplo meticulosamente.

En el Ejemplo C se aplica lo que aprendiste en la investigación para resolver un problema de movimiento de proyectiles. Intenta resolver el problema por tu cuenta.

LECCIÓN CONDENSADA

7.4 La fórmula cuadrática

En esta lección

- Aprenderás cómo se deriva la **fórmula cuadrática**
- Usarás la fórmula cuadrática para resolver problemas de movimiento de proyectiles

Puedes usar una gráfica para aproximar las intersecciones x de una función cuadrática. Si puedes escribir la ecuación de una función en forma factorizada, puedes hallar los valores exactos de sus intersecciones x. La mayoría de las ecuaciones cuadráticas no se pueden convertir fácilmente a su forma factorizada. Aprenderás como encontrar las intersecciones x exactas de cualquier función cuadrática.

Lee el Ejemplo A en tu libro atentamente, y después lee el ejemplo siguiente.

EJEMPLO Encuentra las intersecciones x de $y = 2x^2 - 7x + 1$.

► ***Solución*** Las intersecciones x son las soluciones de $2x^2 - 7x + 1 = 0$. Intenta proporcionar el motivo de cada paso de la solución siguiente. Observa que los primeros cuatro pasos implican reescribir el lado izquierdo de la forma $a(x - h)^2 + k$.

$$2x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$2\left(x^2 - \frac{7}{2}x\right) + 1 = 0$$

$$2\left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{16}\right) - \frac{49}{8} + 1 = 0$$

$$2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{41}{8} = 0$$

$$2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{41}{8}$$

$$\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{41}{16}$$

$$x - \frac{7}{4} = \frac{\pm\sqrt{41}}{4}$$

$$x = \frac{7}{4} \pm \frac{\sqrt{41}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{4}$$

Las intersecciones x son $x = \frac{7 + \sqrt{41}}{4} \approx 3.351$ y $x = \frac{7 - \sqrt{41}}{4} \approx 0.149$.

La serie de ecuaciones que viene después del Ejemplo A en tu libro muestra cómo puedes derivar la **fórmula cuadrática** siguiendo los mismos pasos del Ejemplo A. La fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

da la solución general de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Sigue los pasos de la derivación, usando papel y lápiz. Para asegurarte de que entiendes la fórmula cuadrática, úsala para verificar que las soluciones de $2x^2 - 7x + 1 = 0$ son $x = \frac{7 + \sqrt{41}}{4}$ y $x = \frac{7 - \sqrt{41}}{4}$.

(continúa)

Lección 7.4 • La fórmula cuadrática (continuación)

Investigación: ¿Hasta qué altura?

Completa la investigación en tu libro, y después compara tus respuestas con las siguientes.

Paso 1 La ecuación es $y = -16x^2 + 88x + 3$, donde y es la altura y x es el tiempo en segundos. (Si respondiste a esta pregunta erróneamente, regresa al análisis del movimiento de proyectiles en la Lección 7.3.)

Paso 2 La ecuación es $24 = -16x^2 + 88x + 3$.

Paso 3 En la forma $ax^2 + bx + c = 0$, la ecuación es $-16x^2 + 88x - 21 = 0$. Para esta ecuación, $a = -16$, $b = 88$, y $c = -21$. Sustituyendo estos valores en la fórmula cuadrática, se obtiene

$$x = \frac{-88 \pm \sqrt{88^2 - 4(-16)(-21)}}{2(-16)} = \frac{-88 \pm \sqrt{6400}}{-32} = \frac{-88 \pm 80}{-32}$$

Entonces, $x = \frac{-88 + 80}{-32} = 0.25$ ó $x = \frac{-88 - 80}{-32} = 5.25$. Así que la pelota se encuentra a 24 pies por encima del suelo a los 0.25 segundos después de golpeada (en su trayectoria de subida) y a los 5.25 segundos después de golpeada (en su trayectoria de bajada).

Paso 4 El vértice es el máximo. La pelota alcanza la altura máxima una sola vez. La pelota alcanza otras alturas una vez cuando sube y otra vez cuando baja, pero el punto máximo es la altura donde la pelota cambia de dirección, así que es alcanzado solamente una vez.

Paso 5 La ecuación es $124 = -16x^2 + 88x + 3$. En la forma $ax^2 + bx + c = 0$, la ecuación es $-16x^2 + 88x - 121 = 0$. Para esta ecuación, $a = -16$, $b = 88$, y $c = -121$. Sustituyendo estos valores en la fórmula cuadrática, se obtiene

$$x = \frac{-88 \pm \sqrt{88^2 - 4(-16)(-121)}}{2(-16)} = \frac{-88 \pm \sqrt{0}}{-32} = \frac{-88}{-32} = 2.75$$

La pelota alcanza una altura máxima a los 2.75 segundos después de golpeada. Se hace evidente que hay una sola solución cuando te das cuenta de que el valor que está dentro del signo de raíz cuadrada es 0.

Paso 6 La ecuación es $200 = -16x^2 + 88x + 3$. En la forma $ax^2 + bx + c = 0$, la ecuación es $-16x^2 + 88x - 197 = 0$. Para esta ecuación, $a = -16$, $b = 88$, y $c = -197$. Sustituyendo estos valores en la fórmula cuadrática, se obtiene

$$x = \frac{-88 \pm \sqrt{88^2 - 4(-16)(-197)}}{2(-16)} = \frac{-88 \pm \sqrt{-4864}}{-32}$$

El valor dentro del signo de raíz cuadrada es negativo. Debido a que la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real, la ecuación no tiene solución que sea número real.

Tu trabajo en la investigación muestra que cuando el valor que está dentro del signo de raíz cuadrada, $b^2 - 4ac$, es 0, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene una sola solución y que cuando el valor que está dentro del signo de raíz cuadrada, $b^2 - 4ac$, es negativo, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene solución dentro de los números reales. Esto significa que si tienes una ecuación cuadrática en forma general, puedes usar el valor $b^2 - 4ac$ para determinar si la gráfica tendrá cero, una, o dos intersecciones x.

El Ejemplo B en tu libro muestra la importancia de escribir una ecuación en su forma general, antes de intentar aplicar la fórmula cuadrática. Lee el ejemplo atentamente.

LECCIÓN CONDENSADA

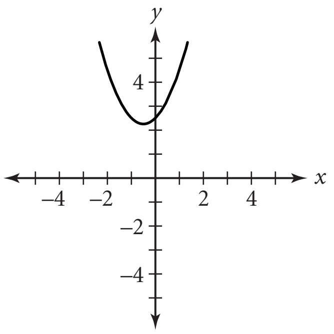
7.5

Números complejos

En esta lección

- Aprenderás que algunas ecuaciones polinomiales tienen soluciones que son **números complejos**
- Aprenderás cómo sumar, restar, multiplicar, y dividir los números complejos

La gráfica de $y = x^2 + x + 2.5$ no tiene intersecciones x.



Si usas la fórmula cuadrática para intentar encontrar las intersecciones x, obtienes

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(2.5)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{-9}}{2}$$

Los números $\frac{-1 + \sqrt{-9}}{2}$ y $\frac{-1 - \sqrt{-9}}{2}$ no son números reales porque contienen la raíz cuadrada de un número negativo. Los números en los que están incluidos los números reales, además de las raíces cuadradas de números negativos, se conocen como **números complejos.** La definición del conjunto de los números complejos hace posible resolver ecuaciones como $x^2 + x + 2.5 = 0$ y $x^2 + 4 = 0$, que no tienen soluciones en el conjunto de los números reales.

Las raíces cuadradas de números negativos se expresan usando una **unidad imaginaria** que se llama ***i*** y se define como $i^2 = -1$ ó $i = \sqrt{-1}$. Puedes reescribir $\sqrt{-9}$ como $\sqrt{9} \cdot \sqrt{-1}$, ó $3i$. Por tanto, las dos soluciones de la ecuación cuadrática anterior se pueden escribir como $\frac{-1 + 3i}{2}$ y $\frac{-1 - 3i}{2}$, ó $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ y $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. Estas dos soluciones son un **par conjugado,** lo que significa que una está en la forma $a + bi$ y la otra en la forma $a - bi$. Los dos números de un par conjugado son **conjugados complejos.**

Las raíces de las ecuaciones polinomiales pueden ser números reales o números complejos no reales, o los dos. Sin embargo, siempre que el polinomio tenga coeficientes de números reales, cualquier raíz no real aparecerá en par conjugado, como $3i$ y $-3i$ ó $6 + 5i$ y $6 - 5i$.

En tu libro se define un número complejo como un número de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales y $i = \sqrt{-1}$. El número a se conoce como la parte real y el número b se conoce como la parte imaginaria. El conjunto de números complejos incluye todos los números reales y todos los números imaginarios. Observa el diagrama en la página 392, donde se muestra la relación entre estos números y algunos otros conjuntos de números que tal vez ya conozcas, así como ejemplos de números de cada conjunto. Después lee el ejemplo en tu libro, donde se muestra cómo resolver la ecuación $x^2 + 3 = 0$.

(continúa)

Lección 7.5 • Números complejos (continuación)

Investigación: Aritmética compleja

En esta investigación descubrirás las reglas para realizar cálculos con números complejos.

Parte 1: Adición y sustracción

Sumar y restar números complejos es parecido a combinar términos semejantes. Usa tu calculadora para sumar o restar los números de las Partes 1a–d en tu libro. Después haz una conjetura sobre cómo sumar los números complejos sin calculadora. A continuación están las soluciones y una posible conjetura.

a. $5 + i$

b. $5 + 3i$

c. $-1 - 9i$

d. $3 - i$

Posible conjetura: Para sumar dos números complejos, suma las partes reales y las partes imaginarias. En símbolos, $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

Parte 2: Multiplicación

Multiplicar los números complejos $a + bi$ y $c + di$ es muy parecido a multiplicar los binomios $a + bx$ y $c + dx$. Sólo necesitas tener en mente que $i^2 = -1$. Multiplica los números complejos de las Partes 2a–d, y expresa las respuestas en la forma $a + bi$. Las respuestas se muestran a continuación.

a.

$(2 - 4i)(3 + 5i) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5i - 4i \cdot 3 - 4i \cdot 5i$	Desarrolla como lo harías para un producto de binomios.
$= 6 + 10i - 12i - 20i^2$	Multiplica dentro de cada término.
$= 6 - 2i - 20i^2$	Combina $10i$ y $-12i$.
$= 6 - 2i - 20(-1)$	$i^2 = -1$
$= 26 - 2i$	Combina 6 y 20.

b. $-16 + 3i$

c. $-12 - 16i$

d. $-8 - 16i$

Parte 3: Los conjugados complejos

Completa las Partes 3a–d, que implican hallar la suma o el producto de un número complejo y su conjugado. Las respuestas se muestran a continuación.

a. 4

b. 14

c. 20

d. 32

Posibles generalizaciones:

La suma de un número y su conjugado es un número real:
$(a + bi) + (a - bi) = 2a$.

El producto de un número real y su conjugado es un número real:
$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

(continúa)

Lección 7.5 • Números complejos (continuación)

Parte 4: División

Para dividir dos números complejos, escribe el problema de división como fracción, multiplica por $\frac{\text{conjugado del denominador}}{\text{conjugado del denominador}}$ (para cambiar el denominador a un número real) y después escribe el resultado de la forma $a + bi$. Divide los números de las Partes 4a–d. Aquí tienes las respuestas.

a. $\dfrac{7+2i}{1-i} = \dfrac{7+2i}{1-i} \cdot \dfrac{1+i}{1+i}$ Multiplica por $\frac{\text{conjugado del denominador}}{\text{conjugado del denominador}}$.

$= \dfrac{5+9i}{2}$ Multiplica. El denominador se vuelve un número real.

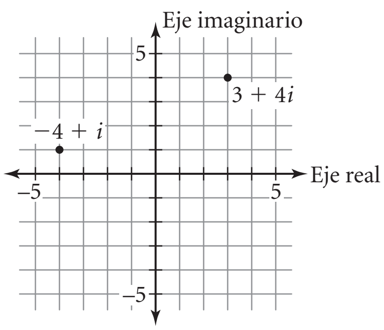
$= 2.5 + 4.5i$ Divide.

b. $-0.56 - 0.92i$

c. $0.22 - 0.04i$

d. $0.6 - 0.8i$

Los números complejos pueden graficarse en un **plano complejo,** en el cual el eje horizontal es el **eje real** y el eje vertical es el **eje imaginario.** El número $a + bi$ se representa mediante el punto cuyas coordenadas son (a, b). He aquí la gráfica de los números $3 + 4i$ y $-4 + i$.



LECCIÓN CONDENSADA

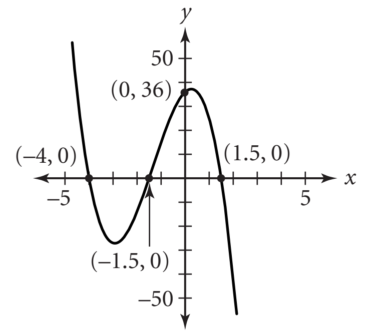
7.6 Factorización de polinomios

En esta lección

- Aprenderás sobre las **funciones cúbicas**
- Usarás las intersecciones x de una función polinomial para ayudarte a escribir la función en forma factorizada

Las ecuaciones polinomiales $y = x^2 + 6x + 9$ y $y = (x + 3)(x + 3)$ son equivalentes. La primera está en forma general y la segunda está en forma factorizada. Escribir una ecuación polinomial en forma factorizada es útil para encontrar las intersecciones x, o ceros, de la función. En esta lección aprenderás algunas técnicas para escribir los polinomios de grado superior en forma factorizada.

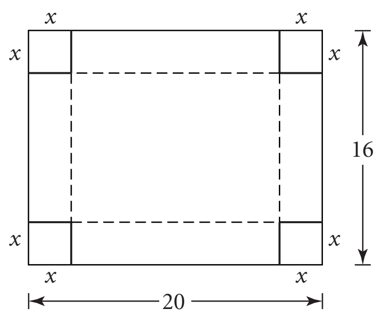
Una función polinomial de 3^er grado se llama una **función cúbica.** Aquí se ve una gráfica de la función cúbica $y = -4x^3 - 16x^2 + 9x + 36$.



Las intersecciones x de la función son -4, -1.5, y 1.5, de modo que su ecuación factorizada debe estar en la forma $y = a(x + 4)(x + 1.5)(x - 1.5)$. Para hallar el valor de a, puedes sustituir las coordenadas de otro punto de la curva. La intersección y es (0, 36). Sustituyendo este punto en la ecuación, se obtiene $36 = a(4)(1.5)(-1.5)$. Entonces, $a = -4$ y la forma factorizada de la ecuación es

$$y = -4(x + 4)(x + 1.5)(x - 1.5)$$

Investigación: La fábrica de cajas



Puedes hacer una caja a partir de una hoja de papel de 16 por 20 unidades, cortando cuadrados de longitud x en las esquinas y doblando los lados hacia arriba.

Sigue Procedure Note en tu libro para construir cajas de diferentes valores enteros de x. Registra las dimensiones y el volumen de cada caja. (Si no deseas construir las cajas, intenta dibujarlas en tu mente.) Completa la investigación y después compara tus resultados con los siguientes.

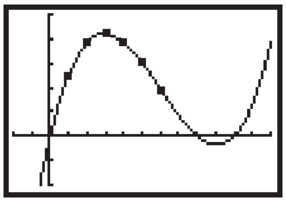
Paso 1 Aquí se presentan los resultados para los valores enteros de x, de 1 hasta 6.

x	Longitud	Ancho	Altura	Volumen y
1	18	14	1	252
2	16	12	2	384
3	14	10	3	420
4	12	8	4	384
5	10	6	5	300
6	8	4	6	192

(continúa)

Paso 2 Las dimensiones de las cajas son $20 - 2x$, $16 - 2x$, y x. Por tanto, la función del volumen es $y = (16 - 2x)(20 - 2x)(x)$.

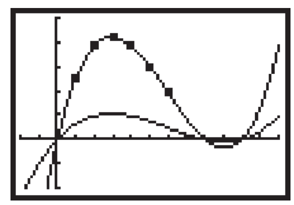
Paso 3 Los puntos de datos se encuentran en la gráfica de la función.



$[-2, 12, 1, -200, 500, 100]$

Paso 4 Si desarrollaras $(16 - 2x)(20 - 2x)(x)$, el resultado sería un polinomio, y la mayor potencia de x sería 3. Por consiguiente, la función es una función polinomial de tercer grado.

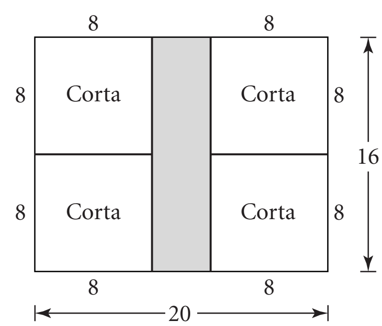
Paso 5 Las intersecciones x de la gráfica son 0, 8, y 10, de modo que la función es $y = x(x - 8)(x - 10)$.



$[-2, 12, 1, -200, 500, 100]$

Paso 6 Las gráficas tienen las mismas intersecciones x y la misma forma general, pero sus factores de escala verticales son diferentes. Un factor de escala vertical de 4 las hace equivalentes: $y = 4x(x - 8)(x - 10)$.

Paso 7 Si $x = 0$, no hay lados para doblar y no se puede formar una caja. Para $x = 8$, se cortarían tiras de 8 unidades de ancho de los lados de la hoja. Doblar los "lados" significaría doblar la tira restante a la mitad, lo cual no formaría una caja.



Un valor de $x = 10$ es imposible porque es más de la mitad de la longitud del lado más corto de la hoja. En esta situación, sólo tiene sentido un dominio de $0 < x < 8$. Al hacer un zoom y rastrear la gráfica para hallar las coordenadas del punto más alto, puedes hallar que el valor x de aproximadamente 2.94 maximiza el volumen.

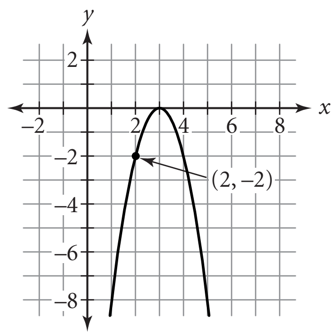
Trabaja el ejemplo en tu libro, que te pide encontrar la forma factorizada de una función polinomial usando las intersecciones x de la gráfica. Este método funciona bien cuando los ceros de una función son valores enteros. Desafortunadamente, éste no es siempre el caso. En ocasiones, los ceros de un polinomio no son "agradables" valores racionales o enteros, y a veces ni siquiera son números reales.

En las funciones cuadráticas, si no puedes hallar los ceros factorizando o trazando la gráfica, siempre puedes usar la fórmula cuadrática. Ya que conoces los ceros, r_1 y r_2, puedes escribir el polinomio de la forma $y = a(x - r_1)(x - r_2)$. Lee el resto de la lección en tu libro, y después lee el ejemplo siguiente.

(continúa)

Lección 7.6 • Factorización de polinomios (continuación)

EJEMPLO Escribe la ecuación de la función siguiente en forma factorizada.



▶ ***Solución*** La ecuación factorizada está en la forma $y = a(x - r_1)(x - r_2)$, donde r_1 y r_2 son los ceros. De la gráfica, puedes ver que el único cero real es 3. Si el otro cero fuera un número no real, entonces su conjugado también sería un cero. Esto significaría la existencia de tres ceros, lo cual no es posible. Así pues, 3 debe ser un "doble cero". Esto quiere decir que la función está en la forma $y = a(x - 3)(x - 3)$, o $y = a(x - 3)^2$. Para hallar el valor de a, sustituye $(2, -2)$: $-2 = a(-1)^2$, de modo que $a = -2$. La forma factorizada de la función es $y = -2(x - 3)^2$.

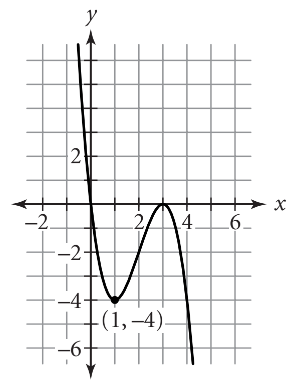
LECCIÓN CONDENSADA

7.7 Polinomios de grado superior

En esta lección

- Describirás los **valores extremos** y el **comportamiento extremo** de las funciones polinomiales
- Resolverás un problema que implica la **maximización** de una función polinomial
- Escribirás ecuaciones para unas funciones polinomiales con intersecciones dadas

A menudo los polinomios con grado 3 o mayor se conocen como los polinomios de grado superior. Aquí se muestra la gráfica del polinomio $y = -x(x - 3)^2$, ó $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$. La propiedad del producto cero te dice que los ceros son $x = 0$ y $x = 3$, los valores de x para los que $y = 0$. Las intersecciones x de la gráfica lo confirman.



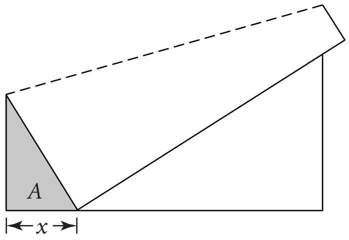
La gráfica tiene otras características claves, además de las intersecciones x. El punto $(1, -4)$ se llama un **mínimo local** porque es más bajo que los otros puntos cercanos a él. El punto $(3, 0)$ se llama un **máximo local** porque es más alto que los otros puntos cercanos a él. Puedes describir el **comportamiento extremo** de la gráfica, es decir, lo que sucede en la gráfica a medida que los valores x aumentan en las direcciones positiva y negativa. En esta gráfica, a medida que x toma valores positivos más grandes, y se vuelve cada vez más negativa. A medida que x toma valores negativos más grandes, y se vuelve cada vez más grande.

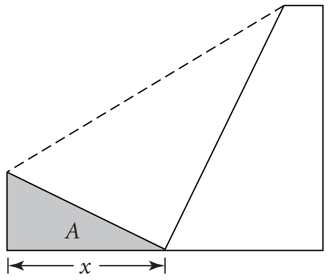
En la introducción a la Lección 7.7 en tu libro, se da otro ejemplo de un polinomio de tercer grado y su gráfica.

La gráfica de una función polinomial con coeficientes reales tiene una intersección y, posiblemente una o más intersecciones x, y otras características como máximos o mínimos locales y su comportamiento extremo. Los máximos y mínimos se llaman **valores extremos.**

Investigación: El triángulo mayor

Empieza con una hoja de papel de 8.5 por 11 pulg. En centímetros, las dimensiones son 21.5 por 28 cm. Orienta el papel de modo que el lado largo quede horizontal. Dobla la esquina superior izquierda de modo que toque algún punto del lado inferior. Encuentra el área, en cm^2, del triángulo que se forma en la esquina inferior izquierda.

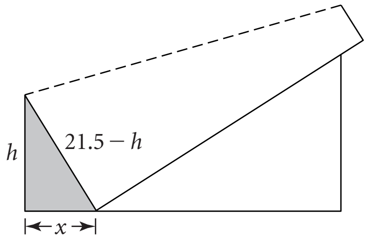




¿Qué distancia, x, a lo largo del lado inferior de la hoja, produce el triángulo con mayor área?

Para responder esta pregunta, primero encuentra una fórmula para el área del triángulo en términos de x. Trata de hacerlo por tu cuenta, antes de seguir leyendo.

He aquí una manera de encontrar la fórmula: sea h la altura del triángulo. Entonces la hipotenusa tiene una longitud de $21.5 - h$. (¿Por qué?)



(continúa)

Lección 7.7 • Polinomios de grado superior (continuación)

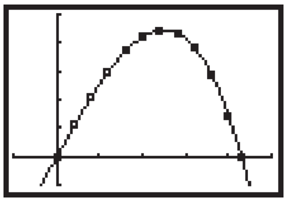
Usa el teoréma de Pitágoras para ayudarte a escribir h en términos de x.

$x^2 + h^2 = (21.5 - h)^2$, entonces $h = \dfrac{462.25 - x^2}{43}$

Ahora puedes escribir una fórmula para el área, y.

$$y = \frac{1}{2}x\left(\frac{462.25 - x^2}{43}\right)$$

Aquí se presenta una gráfica de la función del área. Si rastreas la gráfica, encontrarás que el punto máximo se ubica en aproximadamente (12.4, 44.5). Por tanto, el valor de x que da la mayor área es aproximadamente 12.4 cm. El área máxima es aproximadamente 44.5 cm^2.



$[-5, 25, 5, -10, 50, 10]$

El Ejemplo A en tu libro muestra cómo encontrar la ecuación para un polinomio dadas las intersecciones x y una intersección y. Lee el ejemplo atentamente. Para evaluar tu comprehensión, encuentra una función polinomial con las intersecciones x de -6, -2, y 1, y la intersección y de 60. (Una respuesta es $y = -5(x + 6)(x + 2)(x - 1)$.)

Las Gráficas A a D en la página 407 de tu libro muestran las formas posibles de la gráfica de una función polinomial de tercer grado. La Gráfica A es la gráfica de la función madre $y = x^3$. La gráfica de cualquier otro polinomio de tercer grado será una transformación de la Gráfica A.

El Ejemplo B en tu libro muestra cómo encontrar una función polinomial con ceros dados, cuando algunos de ellos son ceros complejos. La clave para encontrar la solución es recordar que los ceros complejos vienen en pares conjugados. Lee ese ejemplo atentamente, y después lee el ejemplo siguiente.

EJEMPLO Encuentra una función polinomial de cuarto grado con coeficientes reales y ceros $x = -2$, $x = 3$, y $x = 1 - i$.

► ***Solución*** Los ceros complejos se presentan en pares conjugados, de modo que $x = 1 + i$ también debe ser un cero. Así pues, una posible función, en forma factorizada, es

$$y = (x + 2)(x - 3)(x - (1 - i))(x - (1 + i))$$

Multiplica los factores para obtener un polinomio en forma general.

$$\begin{aligned} y &= (x + 2)(x - 3)(x - (1 - i))(x - (1 + i)) \\ &= \left(x^2 - x - 6\right)\left(x^2 - (1 + i)x - (1 - i)x + (1 - i)(1 + i)\right) \\ &= \left(x^2 - x - 6\right)\left(x^2 - x - ix - x + ix + 2\right) \\ &= \left(x^2 - x - 6\right)\left(x^2 - 2x + 2\right) \\ &= x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x^3 + 2x^2 - 2x - 6x^2 + 12x - 12 \\ &= x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 10x - 12 \end{aligned}$$

Verifica la solución haciendo una gráfica. (Sólo verás los ceros reales.)

Observa que una función polinomial de grado n siempre tiene n ceros. Sin embargo, algunos ceros pueden ser números no reales, y es posible que la función no tenga n intersecciones x.

LECCIÓN CONDENSADA

7.8

Más sobre cómo encontrar soluciones

En esta lección

- Usarás la **división larga** para hallar las raíces de un polinomio de grado superior
- Usarás el **Teorema de la raíz racional** para encontrar todas las posibles raíces racionales de un polinomio
- Usarás la **división sintética** para dividir un polinomio entre un factor lineal

Puedes encontrar los ceros de una función cuadrática factorizando o usando la fórmula cuadrática. En ocasiones puedes usar una gráfica para hallar los ceros de los polinomios de grado superior, pero este método puede darte solamente una aproximación de los ceros reales, y no funcionará en lo absoluto para encontrar los ceros no reales. En esta lección aprenderás un método para hallar los ceros exactos, reales y no reales, de muchos polinomios de grado superior.

El Ejemplo A en tu libro muestra que, si conoces algunos de los ceros de una función polinomial, en ocasiones puedes usar la división larga para hallar las otras raíces. Sigue este ejemplo usando papel y lápiz. Asegúrate de entender cada paso.

Para confirmar que un valor es un cero de una función polinomial, sustitúyelo en la ecuación, para verificar que el valor de la función es cero. En este proceso se utiliza el **Teorema del factor,** que establece que $(x - r)$ es un factor de una función polinomial $P(x)$ si y solamente si $P(r) = 0$.

Cuando divides los polinomios, asegúrate de escribir tanto el divisor como el dividendo de modo que los términos estén en orden decreciente según el grado. Si no está presente ningún grado, inserta un término con coeficiente 0, para preservar el lugar. Por ejemplo, para dividir $x^4 - 13x^2 + 36$ entre $x^2 - 9$, reescribe $x^4 - 13x^2 + 36$ como $x^4 + 0x^3 - 13x^2 + 0x + 36$ y $x^2 - 9$ como $x^2 + 0x - 9$. El problema de división siguiente muestra que $x^4 - 13x^2 + 36 = \left(x^2 - 9\right)\left(x^2 - 4\right)$.

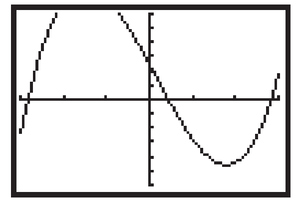
$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4 \\
\cline{2-2}
x^2 + 0x - 9 & x^4 + 0x^3 - 13x^2 + 0x + 36 \\
 & \underline{x^4 + 0x^3 - 9x^2} \\
 & -4x^2 + 0x + 36 \\
 & \underline{ -4x^2 + 0x + 36} \\
 & 0
\end{array}
$$

En el Ejemplo A, encontraste algunos ceros a partir de la gráfica. Si las intersecciones x de una gráfica no son enteras, la identificación de los ceros puede resultar difícil. El **Teorema de la raíz racional** te dice cuáles números racionales podrían ser ceros. Establece que si la ecuación polinomial $P(x) = 0$ tiene raíces racionales, entonces son de la forma $\frac{p}{q}$, donde p es un factor del término constante y q es un factor del coeficiente del término de mayor grado. Observa que este teorema te ayuda a encontrar solamente las raíces racionales. El Ejemplo B muestra cómo se utiliza el teorema. Trabaja ese ejemplo y después lee el ejemplo siguiente.

(continúa)

EJEMPLO Encuentra las raíces de $7x^3 - 3x^2 - 56x + 24 = 0$.

▶ ***Solución*** Aquí se muestra la gráfica de la función $y = 7x^3 - 3x^2 - 56x + 24$.



$[-3, 3, 1, -60, 60, 10]$

Ninguna de las intersecciones x son enteras. El Teorema de la raíz racional te dice que cualquier raíz racional será un factor de 24 dividida entre un factor de 7. Los factores de 24 son $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12$, y ±24. Los factores de 7 son ±1 y ±7. Sabes que no hay raíces enteras, de modo que sólo necesitas considerar los números $\pm\frac{1}{7}, \pm\frac{2}{7}, \pm\frac{3}{7}, \pm\frac{4}{7}, \pm\frac{6}{7}, \pm\frac{8}{7}, \pm\frac{12}{7}$, y $\pm\frac{24}{7}$. La gráfica indica que una de las raíces se encuentra entre -3 y -2. Ninguna de las posibilidades se encuentra en ese intervalo. Otra raíz es un poco menor que $\frac{1}{2}$. Ésta podría ser $\frac{3}{7}$. Intenta sustituyendo $\frac{3}{7}$ en el polinomio.

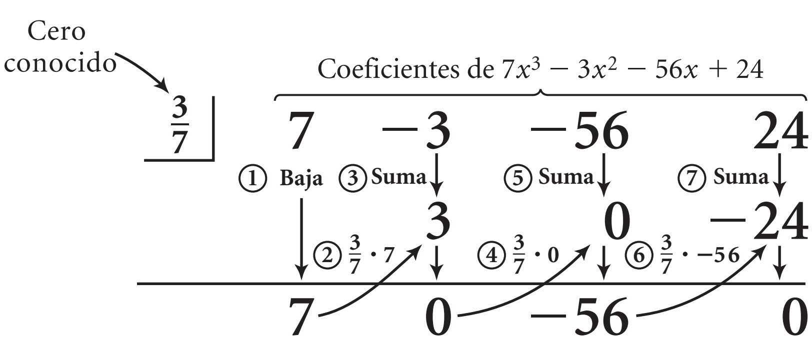
$$7\left(\frac{3}{7}\right)^3 - 3\left(\frac{3}{7}\right)^2 - 56\left(\frac{3}{7}\right) + 24 = \frac{27}{49} - \frac{27}{49} - 24 + 24 = 0$$

Entonces, $\frac{3}{7}$ es una raíz, lo cual significa que $\left(x - \frac{3}{7}\right)$ es un factor. Usa la división para separar este factor del polinomio.

$$\begin{array}{r|l} & 7x^2 - 56 \\ \hline x - \frac{3}{7} & 7x^3 - 3x^2 - 56x + 24 \\ & \underline{7x^3 - 3x^2} \\ & \qquad\qquad -56x + 24 \\ & \qquad\qquad \underline{-56x + 24} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Así que $7x^3 - 3x^2 - 56x + 24 = 0$ es equivalente a $\left(x - \frac{3}{7}\right)\left(7x^2 - 56\right) = 0$. Para hallar las otras raíces, resuelve $7x^2 - 56 = 0$. Las soluciones son $x = \pm\sqrt{8}$. Por tanto, las raíces son $x = \frac{3}{7}$, $x = \sqrt{8}$, y $x = -\sqrt{8}$.

La **división sintética** es un método corto para dividir un polinomio entre un factor lineal. Lee el resto de la lección en tu libro para ver cómo usar la división sintética. A continuación se presenta un ejemplo en el que se usa la división sintética para hallar $\frac{7x^3 - 3x^2 - 56x + 24}{x - \frac{3}{7}}$. Observa que en el ejemplo anterior, encontraste este mismo cociente usando la división larga.



El resultado demuestra que $\frac{7x^3 - 3x^2 - 56x + 24}{x - \frac{3}{7}} = 7x^3 - 56$, de modo que $7x^3 - 3x^2 - 56x + 24 = \left(x - \frac{3}{7}\right)\left(7x^2 - 56\right)$.