UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
Departamento de matematica y CC.

Cálculo Aplicado

EJERCICIOS RESUELTOS Y PROPUESTOS

SEGUNDA PARTE
La integral indefinida ,la integral definida; Aplicaciones, convergencia

Prof. JORGE INOSTROZA LAGOS
Prof. CLAUDIO LABBÉ D.

2010

INDICE:

1.- LA INTEGRAL INDEFINIDA:

Ejercicios Resueltos

Recordemos que:

Si f(x) es una función real, entonces

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dF(x)}{dx} = f(x)}$$

Usando esto, verifique las primitivas básicas siguientes haciendo la derivada del lado derecho:

1) $$\int \frac{dx}{b^2x^2 - a^2} = \frac{1}{2ab} \operatorname{Ln}\left(\frac{bx - a}{bx + a}\right) + C$$

2) $$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{bx}{a} + C$$

3) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b} \operatorname{arcsen} \frac{bx}{a} + C$$

4) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{b^2x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{bx}{a} + C$$

5) Verificar: $$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{b} \operatorname{Ln}\left(bx + \sqrt{b^2x^2 \pm a^2}\right) + C$$

6) Verificar: $$\int \sqrt{b^2x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{b^2x^2 \pm a^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2b} \operatorname{Ln}\left(bx + \sqrt{b^2x^2 \pm a^2}\right) + C$$

7) Verificar: $$\int \sqrt{b^2x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{b^2x^2 \pm a^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2b} \operatorname{Ln}\left(bx + \sqrt{b^2x^2 \pm a^2}\right) + C$$

8) Verificar: $$\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2 - b^2x^2}}{2} + \frac{a^2}{2b} \operatorname{arcsen} \frac{bx}{a} + C$$

9) Verificar: $$\int \operatorname{sen}^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + C$$

10) Verificar: $\int \cos^2 ax\, dx \;=\; \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} \;+ C$

11) Verificar: $\int \operatorname{Ln}(a+bx)dx \;=\; \frac{1}{b}(a + bx)\operatorname{Ln}(a+bx) - x \;+ C$

12) Verificar: $\int \sec ax\, dx \;=\; \frac{1}{a}\operatorname{Ln}(\sec ax + \operatorname{tg} ax) + C \;=\; \frac{1}{2a}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+\operatorname{sen} ax}{1-\operatorname{sen} ax}\right) + C$

13) Verificar: $\int \operatorname{cosec} ax\, dx \;=\; \frac{1}{a}\operatorname{Ln}(\operatorname{cosec} ax - \operatorname{cotg} ax) + C \;=\; \frac{1}{2a}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+\cos ax}{1-\cos ax}\right) + C$

En cada caso se deberá derivar el segundo miembro para obtener la función integrando, es decir, verificar que

$$\frac{dF(x)}{dx} \;=\; f(x) \qquad \text{cuando} \quad \int f(x)dx \;=\; F(x)\,.$$

Buen ejercicio de recapitulación, muy necesario para lo que viene.

En esta tabla básica, en su segunda parte, cada ejemplo será deducido mediante los siguientes métodos de integración que se presentarán.

2.- MÉTODOS DE INTEGRACIÓN.-

Ejercicios Resueltos.-

(A) Método de integración inmediata

Se trata de determinar las primitivas a partir de sus propiedades, lo sabido en derivación y algunos recursos algebraicos, además de los ejemplos logrados en la Tabla Básica.

Ejemplos resueltos

Calcular:

1) $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 dx$

Solución:

Desarrollando: $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 dx = \int (x + 2 + \frac{1}{x}) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \mathrm{Ln}\, x + C_{//}$

2) $\int x\sqrt[3]{x}\, dx$

Solución:

$$\int x\sqrt[3]{x}\, dx = \int x^{4/3} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + C = \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7} + C_{//}$$

3) $\int (2e^x + 3\,\mathrm{sen}\, x) dx$

Solución:

$$\int (2e^x + 3\,\mathrm{sen}\, x) dx = 2\int e^x dx + 3\int \mathrm{sen}\, x\, dx = 2e^x - 3\cos x + C_{//}$$

4) $\int \frac{x^{3/2} + x^{2/3}}{x^{1/4}} dx$

Solución:

$$\int \frac{x^{3/2}+x^{2/3}}{x^{1/4}}dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}+x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}\right)dx = \int(x^{\frac{5}{4}}+x^{\frac{5}{12}})dx = \tfrac{4}{9}x^{\frac{9}{4}} + \tfrac{12}{17}x^{\frac{17}{12}} + C_{//}$$

5) $\displaystyle\int \frac{u-3}{\sqrt{u}}du$

Solución:

$$\int \frac{u-3}{\sqrt{u}}du = \int(u^{\frac{1}{2}}+3u^{-\frac{1}{2}})du = \tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 6u^{\frac{1}{2}} + C_{//}$$

6) $\displaystyle\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^{3} dx$

Solución:

$$\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^{3} dx = \int\left(x^{3}-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^{3}}\right)dx = \frac{x^{4}}{4} - \frac{3x^{2}}{2} + 3\operatorname{Ln}x + \frac{1}{2x^{2}} + C_{//}$$

7.- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{3/5}} = x^{2/5}+c$ 2.- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = ArcSen(x)$ 3.- $\displaystyle\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{L_{n}a}+c$

8.- $\displaystyle\int \frac{Cosx}{Senx}dx = L_{n}Senx+c$ 5.- $\displaystyle\int SecxTgxdx = Secx+c$ 6.- $\displaystyle\int Sec^{2}x = Tgx+c$

9.- $\displaystyle\int (x^{2}+x+1)^{2}dx = \int(x^{4}+2x^{3}+3x^{2}+2x+1)dx = \frac{x^{5}}{5}+\frac{x^{4}}{2}+x^{3}+x+c$

10.- $\displaystyle\int(\sqrt{x}+\frac{1}{x})^{3}dx = \int(x^{3/2}+3+\frac{3}{x^{3/2}}+\frac{1}{x^{3}})dx = \frac{5}{2}x^{5/2}+3x-\frac{6}{x^{1/2}}-\frac{1}{2x^{2}}+c$.

(B) Método de sustitución o cambio de variables

Para el caso que la integral $\int f(x)dx$ sea no inmediata, se propone el cambio de la variable **x** por g(t) que, al diferenciarla, tenemos $dx = g'(t)\,dt$; con esto pretendemos que la nueva integral

$$\int f(g(t))\cdot g'(t)\cdot dt$$

sea inmediata.

Ejemplos resueltos

1) Calcular $\int xe^{x^2}\,dx$

Solución:

Haciendo el cambio $x^2 = u \;\Rightarrow\; x\,dx = \frac{1}{2}du$; sustituyendo:

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C_{//}$$

"Siempre debemos regresar a la variable original".

2) Calcular $\int x^3 \operatorname{sen}(3+x^4)\,dx$

Solución:

Haciendo $3 + x^4 = t$, tenemos $4x^3dx = dt$, ó $x^3dx = \frac{1}{4}dt$. Luego, la integral queda

$$\int x^3 \operatorname{sen}(3+x^4)\,dx = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}(t)\,dt = -\frac{1}{4}\cos(t) + C = -\frac{1}{4}\cos(3+x^4) + C_{//}$$

3) Calcular $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Solución:

Tomando $1 - x^2 = u^2 \;\Rightarrow\; x\,dx = -u\,du$. Luego,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{u\,du}{u} = -u + C = -\sqrt{1-x^2} + C_{//}$$

4) Determinar $\int x^3\sqrt{x^2-a^2}\,dx$

Solución:

Si hacemos $x^2 - a^2 = u^2$, entonces $x\,dx = u\,du$; y como $x^2 = u^2 + a^2$, tenemos

$$\int x^3\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,x\,dx = \int (u^2+a^2)\cdot u\cdot(u\,du) = \int (u^4+a^2u^2)\,du$$

$$= \frac{u^5}{5} + \frac{a^2u^3}{3} + C = \frac{1}{5}(x^2-a^2)^{\frac{5}{2}} + \frac{a^2}{3}(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}} + C_{//}$$

5) Resolver $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}$

Solución:

Si $1 + \operatorname{sen} x = u^2$, $\cos x = 2u\,du$; luego,

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}} = \int \frac{2u\,du}{u} = 2\int du = 2u + C = 2\sqrt{1+\operatorname{sen} x} + C_{//}$$

6) Hallar $\displaystyle\int (3-x)^{\frac{1}{3}} x^3\,dx$

Solución:

Haciendo $3 - x = u^3$, se tiene $dx = -3u^2 du$, $x^3 = (3 - u^3)^3 = 27 - 27u^3 + 9u^6 - u^9$, tenemos:

$$\int (3-x)^{\frac{1}{3}} x^3\,dx = \int u(27-27u^3+9u^6-u^9)(-3u^2)\,du = -3\int (27u^3-27u^6+9u^9-u^{12})\,du$$

$$= -3\left(\frac{27}{4}u^4 - \frac{27}{7}u^7 + \frac{9}{10}u^{10} - \frac{12}{13}u^{13}\right) + C$$

$$= -3\left[\frac{27}{4}(3-x)^{\frac{4}{3}} - \frac{27}{7}(3-x)^{\frac{7}{3}} + \frac{9}{10}(3-x)^{\frac{10}{3}} - \frac{12}{13}(3-x)^{\frac{13}{3}}\right] + C_{//}$$

7) Resolver $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Solución:

Si hacemos $\operatorname{arcsen} x = u$, entonces $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du$. Por tanto, la integral queda

$$\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} x)^2 + C_{//}$$

8) Resolver $\displaystyle\int \frac{\operatorname{Ln} x}{x}\,dx$

Solución:

Si $u = Ln\,x$, $\Rightarrow$ $du = \frac{dx}{x}$, $\therefore$ $\int \frac{Ln\,x}{x}dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}(Ln\,x)^2 + C_{//}$

9.- $\int (x)Sen(x)^2 dx$ haciendo $x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int Sentdt = \frac{1}{2}Cost + c = \frac{Cosx^2}{2} + c$

10.- $\int \frac{Cosx}{Sen^2 x}dx$ haciendo $Senx = t$; $C\text{os}\,xdx = dt \Rightarrow \int \frac{dt}{t^2} = \frac{-1}{t} + c = \frac{-1}{Senx} + c$

11-

$\int \frac{e^{2x}dx}{1+3e^{2x}}$ *haciendo* $(1+3e^{2x}) = t \Rightarrow 6e^{2x}dx = dt \Rightarrow I = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{6}L_n t + c = \frac{L_n(1+3e^{2x})}{6} + c$

12.- $\int \frac{dx}{xL_n x}$ *haciendo* $L_n x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du \Rightarrow I = \int \frac{du}{u} = L_n u + c = L_n(L_n x) + c$

13.-

$\int \frac{ArcCos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; *Si* $ArcCosx = u \Rightarrow \frac{dx}{-\sqrt{1-x^2}} = du \Rightarrow I = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c = 1/3ArcCos^3 x + c$

14.-

$\int \frac{3x+2}{(3x^2+4x-4)^2}dx$ *con* $(3x^2 + x - 4) = u \Rightarrow (6x+4)dx = du \Rightarrow$

$I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2u} + c = \frac{1}{2}(3x^2+4x-4)^{-1} + c$

15.-

$\int \frac{xTg^3 x^2}{Cos^2 x^2}dx =$

$\int (Tg^3 x^2 Sec^2 x^2)(xdx)$ *Si* $Tgx^2 = u \Rightarrow 2xSec^2 x^2 dx = du \therefore \frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{u^4}{8} = \frac{Tg^4 x^2}{8} + c$

(C) **Integración por partes**

La fórmula

$$\boxed{\int u\,dv = u\,v - \int v\,du}$$

nos permite sustituir una integral por otra que sea más abordable que la primera**.**

Ejercicios resueltos:

1) Calcular $\int x^n \,\mathrm{Ln}\,x\,dx$, con $n \neq -1$

Solución**:**

Sea $u = \mathrm{Ln}\,x, \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{dx}{x}$

$$dv = x^n\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1};$$

luego, reemplazando en la fórmula anterior**:**

$$\int x^n \,\mathrm{Ln}\,x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot \mathrm{Ln}\,x - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot \mathrm{Ln}\,x - \frac{1}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot \mathrm{Ln}\,x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C_{//}$$

2) Calcular $\int \mathrm{arctg}\,x\,dx$

Solución**:**

Aquí la elección de **u** y **dv** es una sola**:**

$$u = \mathrm{arctg}\,x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{1+x^2}\,; \qquad dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

Así,

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\cdot\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$. Esta última integral la resolvemos haciendo la sustitución $1 + x^2 = z$, lo que da $x\,dx = dz$. Así,

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\cdot\operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = x\cdot\operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2}\operatorname{Ln}(1 + x^2) + C_{//}$$

3) Calcular $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$

<u>Solución</u>:

Aquí conviene elegir: $u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2}$

$dv = x\,dx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2}$

Así, $$\int x\operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2}\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2}\int dx + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

$$\Rightarrow \int x\operatorname{arctg} x\,dx = \tfrac{1}{2}(x^2 + 1)\operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2}x + C_{//}$$

4) Hallar $\int \operatorname{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

<u>Solución</u>:

Tomemos: $u = \operatorname{Ln}(x + \sqrt{1+x^2}) \Rightarrow du = \dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}dx = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

Luego,

$$\int \operatorname{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})\,dx = x\operatorname{Ln}(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} .$$

La última integral la resolvemos haciendo la sustitución $1 + x^2 = u^2$, de donde $x\,dx = u\,du$

Así, $\int Ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx = x\,Ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int du = x\,Ln(x+\sqrt{1+x^2}) - u + C$

$$\Rightarrow \qquad \int Ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx = x\,Ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C_{//}$$

5) Calcular $\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx$

<u>Solución</u>:

$u = x^3 \quad \Rightarrow \quad du = 3x^2dx$

$dv = \operatorname{sen} x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x$

Así, tenemos

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx = -x^3\cos x + 3\int x^2 \cos x\,dx .$$

Integrando por partes nuevamente:

$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2xdx$

$dv = \cos x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \operatorname{sen} x$. Por consiguiente,

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx = -x^3\cos x + 3(x^2 \operatorname{sen} x - 2\int x \operatorname{sen} x\,dx).$$

De nuevo integrando por partes:

$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$

$dv = \operatorname{sen} x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x$

Finalmente,

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx = -x^3\cos x + 3(x^2 \operatorname{sen} x - 2(-x\cos x + \operatorname{sen} x) + C$$

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx = -x^3\cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x\cos x - 6\operatorname{sen} x) + C_{//}$$

6) Calcular $\int \sec^3 x\,dx$

Solución:

Sea $u = \sec x \Rightarrow du = \sec x\,\mathrm{tg}\,x\,dx$

$dv = \sec^2 x\,dx \Rightarrow v = \mathrm{tg}\,x$

Entonces,

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x\,\mathrm{tg}\,x - \int \sec x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x\,\mathrm{tg}\,x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\,dx$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x\,\mathrm{tg}\,x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x\,\mathrm{tg}\,x - \int \sec^3 x\,dx + \mathrm{Ln}\,|\sec x + \mathrm{tg}\,x| + C$$

$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x\,\mathrm{tg}\,x + \mathrm{Ln}\,|\sec x + \mathrm{tg}\,x| + C$$

$$\Rightarrow \int \sec^3 x\,dx = \tfrac{1}{2}(\sec x\,\mathrm{tg}\,x + \mathrm{Ln}\,|\sec x + \mathrm{tg}\,x|) + K_{//} \qquad (\text{donde } K \equiv \tfrac{1}{2}C)$$

7) Hallar $\int x\cos^2 x\,dx$

Solución:

Haciendo $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos^2 x\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}(x + \mathrm{sen}\,x \cdot \cos x)$ (por la Tabla Básica de Primitivas)

Luego,

$$\int x\cos^2 x\,dx = \frac{x}{2}(x + \mathrm{sen}\,x \cdot \cos x) - \frac{1}{2}\int (x + \mathrm{sen}\,x \cdot \cos x)\,dx$$

$$\int x\cos^2 x\,dx = \frac{x}{2}(x + \mathrm{sen}\,x \cdot \cos x) - \frac{1}{2}\int x\,dx - \frac{1}{2}\int \mathrm{sen}\,x\,d(\mathrm{sen}\,x)$$

$$\int x\cos^2 x\,dx = \frac{x}{2}(x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x) - \frac{x^2}{4} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{4} + C_{//}$$

8) Hallar una fórmula de reducción para $\int x^n e^{2x} dx$

<u>Solución</u>**:**

Haciendo $u = x^n \Rightarrow du = n\,x^{n-1}\,dx$

$dv = e^{2x}\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\therefore \quad I_n = \int x^n e^{2x} dx = \frac{x^n}{2}e^{2x} - \frac{n}{2}\int x^{n-1} e^{2x} dx \,.$$

Vemos que hay que reiterar el Método de Integración por Partes para lograr una fórmula de reducción**:**

$$\boxed{\mathbf{I_n = \frac{x^n}{2}e^{2x} - \frac{n}{2}\cdot I_{n-1}}}$$ "Fórmula de reducción"

9) Calcular $\int \cos(\operatorname{Ln} x)\,dx$

<u>Solución</u>**:**

$u = \cos(\operatorname{Ln} x) \Rightarrow du = -\frac{1}{x}\operatorname{sen}(\operatorname{Ln} x)$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

Entonces,

$$\int \cos(\operatorname{Ln} x)\,dx = x\cos(\operatorname{Ln} x) + \int \operatorname{sen}(\operatorname{Ln} x)\,dx \,.$$

Reiterando el método, hacemos**:**

$u = \operatorname{sen}(\operatorname{Ln} x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}\cos(\operatorname{Ln} x)$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$$\Rightarrow \quad \int \cos(\operatorname{Ln} x)\,dx = x\cos(\operatorname{Ln} x) + x\operatorname{sen}(\operatorname{Ln} x) - \int \cos(\operatorname{Ln} x)\,dx$$

$$2\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + x\,\mathrm{sen}(\ln x)$$

$$\Rightarrow \qquad \int \cos(\ln x)dx = \frac{1}{2}[x\cos(\ln x) + x\,\mathrm{sen}(\ln x)] + C_{//}$$

10.-

$I = \int e^{ax} Cosbxdx \qquad u = e^{ax} \Rightarrow du = ae^{ax}dx$

$$dv = Cosbxdx \Rightarrow v = \frac{1}{b}Senbx \Rightarrow I = \frac{e^{ax}}{b}Senbx - \frac{a}{b}\int e^{ax}Senbxdx\ ,$$

repetimos la integración por partes.

$$u = e^{ax} \Rightarrow du = ae^{ax}dx$$

$$dv = Senbxdx \Rightarrow v = -\frac{1}{b}Cosbx$$

$$I = \frac{e^{ax}}{b}Senbx - \frac{a}{b}(-\frac{e^{ax}}{b}Cosbx + \frac{a}{b}\int e^{ax}Cosbxdx = \frac{e^{ax}}{b}Senbx + \frac{ae^{ax}}{b^2}Cosbx - \frac{a^2}{b^2}I$$

$$(1+\frac{a^2}{b^2})I = \frac{e^{ax}}{b}\ Senbx + \frac{ae^{ax}}{b^2}Cosbx \Leftrightarrow I = \frac{b^2}{a^2+b^2}(\frac{e^{ax}}{b}Senbx + \frac{ae^{ax}}{b^2}Cosbx)$$

10.- $I = \int Cos^2 xdx \;\; Si \;\; u = Cosx \Rightarrow du = -Senxdx \qquad dv = Cosxdx \Rightarrow v = Senx \therefore$

$$I = SenxCosx + \int Sen^2 xdx = SenxCosx + \int (1 - Cos^2 x)dx = SenxCosx + x - I \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{2}SenxCosx + \frac{x}{2} + c\ .$$

11.- $\int ArcSen\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}dx.\;\; Si \;\; u = ArcSen\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2-x^2}{a^2}}}dx = \frac{a}{x}dx$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I = xArcSenx - \int x\frac{a}{x}dx = xArcSenx - ax + c$$

12.- $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$, Aplicamos la integración por partes a

$I_1 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)}$ $\quad$ $Si\ u = (a^2+x^2)^{-1} \Rightarrow du = -(a^2+x^2)^{-2}2x$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$$I_1 = \frac{x}{(a^2+x^2)} + 2\int \frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^2}$$

$$= \frac{x}{(a^2+x^2)} + 2\int \frac{a^2+x^2-a^2}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{x}{(a^2+x^2)} + 2I_1 - 2a^2\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$$

$I_1 = \frac{x}{(a^2+x^2)} + 2I_1 - 2a^2I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2a^2}(I_1 + \frac{x}{(a^2+x^2)}) + c$ sabiendo que $I_1 = \frac{1}{a}ArcTg\frac{x}{a}$

(D) **Método de descomposición en fracciones parciales**

Si el integrando es una función racional de la forma $\frac{p(x)}{q(x)}$, donde p(x) y q(x) son funciones polinomiales irreductibles y donde el grado del denominador es mayor que el del numerador (si el grado del numerador fuese igual o mayor que del denominador, se procede a hacer el cuociente, como por ejemplo: $\frac{x^4+3x^3}{x^2+2x+1} = x^2 + x - 3 + \frac{5x+3}{x^2+2x+1}$), entonces dicha función racional es necesario descomponerla en fracciones parciales más simples, es decir, reemplazarla por la suma algebraica de fracciones cuyas formas nos permitan completar la integración.

Caso I. *Los factores del denominador son todos de primer grado, y ningún factor se repite.*

Corresponde a cada factor no repetido de primer grado, como $x - a$, una fracción parcial de la forma

$$\frac{A}{x-a}, \qquad \text{(A constante)}.$$

Nota: En todos los casos, el número de constantes a determinar es igual al grado del denominador.

Ejemplo 1:

Hallar $\int \frac{x+34}{x^2-4x-12}dx$

Solución:

Descompongamos el integrando:

$$\frac{x+34}{x^2-4x-12} = \frac{x+34}{(x-6)(x+2)} = \frac{A}{x-6} + \frac{B}{x+2}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{x + 34 = A(x + 2) + B(x - 6)} \qquad (\ast)$$

Observando que los factores (x + 2) y (x – 6) se anulan para x = –2 y x = 6 (puntos críticos), respectivamente, en ($\ast$) reemplazamos todas las x por –2 y por 6:

$x = -2 \quad \Rightarrow \quad -2 + 34 = A(-2 + 2) + B(-2 - 6)$

$\qquad 32 = A(0) + B(-8) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B = -4}.$

$x = 6 \quad \Rightarrow \quad 6 + 34 = A(6 + 2) + B(6 - 6)$

$\qquad 40 = A(8) + B(0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A = 5}.$

Luego, $\int \frac{x+34}{x^2-4x-12}dx \;=\; 5\int \frac{1}{x-6}dx \;-4\int \frac{1}{x+2}dx \;=\; 5\,\text{Ln}|x-6| \;-\; 4\,\text{Ln}|x+2| \;+\; \text{Ln}\,C$

$\Rightarrow$ $\int \frac{x+34}{x^2-4x-12}dx \;=$

$\text{Ln}\left(C\frac{(x-6)^5}{(x+2)^4}\right)$ //

Ejemplo 2:

Determinar $\int \frac{dx}{(3x-5)(2-x)}$

Solución:

Descomponiendo, $\frac{1}{(3x-5)(2-x)} \;=\; \frac{A}{3x-5} + \frac{B}{2-x}$

$\Rightarrow$ $\mathbf{1 \;=\; A(2-x) \;+\; B(3x-5)}$. Vemos que los puntos críticos son 2 y $\frac{5}{3}$. Así:

$x = 2 \quad \Rightarrow \quad 1 \;=\; A(0) \;+\; B(1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B = 1}.$

$x = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad 1 \;=\; A(2-\frac{5}{3}) \;+\; B(0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A = 3}.$

Así, $\int \frac{dx}{(3x-5)(2-x)} \;=\; 3\int \frac{dx}{3x-5} \;+\; \int \frac{1}{2-x}dx$

$= 3\cdot \frac{1}{3}\int \frac{3\,dx}{3x-5} \;-\; \int \frac{d(-x)}{2-x} \;=\; \text{Ln}|3x-5| \;-\; \text{Ln}|2-x| \;+\; \text{Ln}\,C$

$\Rightarrow$ $\int \frac{dx}{(3x-5)(2-x)} \;=\; \text{Ln}\left(C\frac{(3x-5)}{(2-x)}\right)$ //

Ejemplo 3:

$\int \frac{x+16}{x^3+2x^2-8x}dx$

Solución:

$x^3 + 2x^2 - 8x \;=\; x(x^2 + 2x - 8) \;=\; x(x+4)(x-2).$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+16}{x^3+2x^2-8x} = \frac{x+16}{x(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{x-2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x + 16 = A(x + 4)(x - 2) + Bx(x - 2) + Cx(x + 4)}$$

(Ptos. críticos: 0, 2, – 4)

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 + 16 = A(0 + 4)(0 - 2) + B(0)(x - 2) + C(0)(0 + 4)$

$16 = A(-8) + B(0) + C(0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A = -2}$

$x = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 + 16 = A(2 + 4)(2 - 2) + B(2)(2 - 2) + C(2)(2 + 4)$

$18 = A(0) + B(0) + C(12) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C = \frac{3}{2}}$

$x = -4 \quad \Rightarrow \quad -4 + 16 = A(-4 + 4)(-4 - 2) + B(-4)(-4 - 2) + C(-4)(-4 + 4)$

$12 = A(0) + B(24) + C(0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B = \frac{1}{2}}$

Luego, $\displaystyle\int \frac{x+16}{x^3+2x^2-8x}dx = -2\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+4} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-2}$

$= -2\,\text{Ln}|x| + \frac{1}{2}\text{Ln}|x + 4| + \frac{3}{2}\text{Ln}|x - 2| + \text{Ln}\,C$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{x+16}{x^3+2x^2-8x}dx = \text{Ln}\left(C\frac{(x+4)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{3}{2}}}{x^2} \right) //$$

<u>**Caso II**</u>. *Los factores del denominador son todos de primer grado, y algunos se repiten*.

En este caso a todo factor de primer grado repetido *n* veces, como $(x - a)^n$, corresponde la suma de *n* fracciones parciales de la forma

$$\frac{A}{(x-a)^n} + \frac{B}{(x-a)^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{M}{x-a}\ .$$

Ejemplo 1:

Resolver $\displaystyle\int \frac{2x^2-25x-33}{(x+1)^2(x-5)}dx$

Solución:

Aquí la descomposición toma la forma

$$\frac{2x^2-25x-33}{(x+1)^2(x-5)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x-5)}$$, lo que implica

$\mathbf{2x^2 - 25x - 33 = A(x-5) + B(x+1)(x-5) + C(x+1)^2}$ $\Rightarrow$ valores críticos: 5, –1.

$x = 5 \quad \Rightarrow \quad 2\cdot 25 - 25\cdot 5 - 33 = A(0) + B(0) + C(6)^2$

$-108 = 36C \quad \Rightarrow$

$C = -3$

$x = -1 \quad \Rightarrow \quad 2 + 25 - 33 = A(-6) + B(0) - 3(0)^2$

$-6 = -6A \quad \Rightarrow$ **$A = 1$.**

Eligiendo otro valor para x, por ej. x = 0,

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 - 0 - 33 = 1(-5) + B(1)(-5) - 3(1)^2$

$-33 = -5 - 5B - 3 \quad \Rightarrow$ **$B = 5$**

Luego,

$$\int \frac{2x^2-25x-33}{(x+1)^2(x-5)}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2}dx + 5\int \frac{1}{(x+1)}dx - 3\int \frac{1}{(x-5)}dx$$

Resolviendo estas tres integrales, tenemos finalmente

$$\int \frac{2x^2-25x-33}{(x+1)^2(x-5)}dx = -\frac{1}{x+1} + 5\mathrm{Ln}(x+1) - 3\mathrm{Ln}(x-5) + C_{//}$$

Ejemplo 2:

Resolver $\displaystyle\int \frac{5x^2+30x+43}{(x+3)^3}dx$

Solución:

Descomponiendo,

$$\frac{5x^2+30x+43}{(x+3)^3} = \frac{A}{(x+3)^3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{x+3}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{5x^2 + 30x + 43 = A + B(x+3) + C(x+3)^2}$. Eligiendo valores sencillos de x:

$x = -3 \quad \Rightarrow \quad 45 - 90 + 43 = A + B(0) + C(0)^2 \quad \Rightarrow$ **$A = -2$**

$$
\left.\begin{array}{lllll}
x = 0 & \Rightarrow & 0 - 0 + 43 = -2 + 3B + 9C & \Rightarrow & B + 3C = \\
x = -2 & \Rightarrow & 20 - 60 + 43 = -2 + B + C & \Rightarrow & B + C = 5
\end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathbf{B = 0} \\ \mathbf{C = 5} \end{array}
$$

Luego,

$$\int \frac{5x^2+30x+43}{(x+3)^3}dx = -2\int \frac{1}{(x+3)^3}dx + 5\int \frac{1}{x+3}dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{5x^2+30x+43}{(x+3)^3}dx = \frac{1}{(x+3)^2} + 5Ln(x+3) + C_{//}$$

Caso III. *El denominador contiene factores de segundo grado, pero ninguno de estos factores se repite*.

A todo factor no repetido de segundo grado, como $x^2 + px + q$, corresponde una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}.$$

Ejemplo 1:

Resolver $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$

Solución:

Según lo indicado más arriba, la descomposición será

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5}.$$ Esto implica que

$$\mathbf{2x^2 - 3x - 3 = A(x^2 - 2x + 5) + (Bx + C)(x - 1)}.$$ Eligiendo valores de x apropiados,

$$
\begin{array}{lllll}
x = 1 & \Rightarrow & 2 - 3 - 3 = A(4) + (Bx + C)(0) & \Rightarrow & \mathbf{A = -1} \\
x = 0 & \Rightarrow & 0 - 0 - 3 = -1(5) + C(-1) & \Rightarrow & \mathbf{C = -2} \\
x = 2 & \Rightarrow & 8 - 6 - 3 = -1(5) + (2B - 2)(1) & \Rightarrow & \mathbf{B = 3}
\end{array}
$$

Luego,

$$\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx = -\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{3x-2}{x^2-2x+5}dx.$$

Hallemos la segunda integral de la derecha. Seguiremos un procedimiento para abordar todas las integrales de este tipo:

a) *Obtener en el numerador la diferencial del denominador*:

En este caso, la diferencial del denominador es $d(x^2 - 2x + 5) = (2x - 2)dx$. Luego, manipulando el denominador, tenemos

$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-\frac{4}{3})}{x^2-2x+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-2+2-\frac{4}{3})}{x^2-2x+5}dx =$$

$$\frac{3}{2}\int \frac{(2x-2)+\frac{2}{3}}{x^2-2x+5}dx$$

b) *Separando en dos integrales*:

$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx + \int \frac{1}{x^2-2x+5}dx$$

c) *Integrando la primera y completando el cuadrado del binomio en el denominador de la segunda*:

$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+5}dx = \frac{3}{2}\text{Ln}(x^2 - 2x + 5) + \int \frac{1}{(x-1)^2+4}dx$$

$$= \text{Ln}\,(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}\text{arctg}\,\tfrac{x-1}{2}$$ (donde hemos usado la fórmula 12)

de la tabla de integrales inmediatas: $\int \frac{du}{a^2+b^2u^2} = \frac{1}{ab}\text{arctg}\,\frac{bu}{a} + C$).

Finalmente,

$$\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx = -\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{3x-2}{x^2-2x+5}dx$$

$$= -\text{Ln}(x-1) + \text{Ln}\,(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}\text{arctg}\,\tfrac{x-1}{2} + C_{//}$$

Caso IV. *El denominador contiene factores de segundo grado, y algunos de estos factores se repiten*.

A todo factor de segundo grado repetido *n* veces, como $(x^2 + px + q)^n$, corresponde la suma de *n* fracciones parciales de la forma

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} \;+\; \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^{n-1}} \;+\;.\,.\,.\,.\,.\,.+\; \frac{Px+Q}{x^2+px+q}\,.$$

Ejemplo**:**

Resolver $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}dx$

Solución**:**

Vemos que el grado del denominador es 6, por lo que necesitamos hallar 6 constantes**.** Así,

$$\frac{1}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2} \;=\; \frac{1}{x(x-1)(x^2-x+1)^2} \;=\; \frac{A}{x} \;+\; \frac{B}{x-1} \;+\; \frac{Cx+D}{(x^2-x+1)^2} \;+\; \frac{Ex+F}{x^2-x+1}\,.$$

Esto implica

$$\mathbf{1 \;=\; A(x-1)(x^2-x+1)^2 + Bx(x^2-x+1)^2 + (Cx+D)x(x-1) + (Ex+F)x(x-1)(x^2-x+1)}$$

Eligiendo apropiados valores de x**:**

$x = 0 \quad\Rightarrow\quad 1 \;=\; A(-1)(1)^2 \;+\; B(0)\;\; (0+D)(0) \;+\; (0+F)(0) \qquad\Rightarrow\quad \mathbf{A = -1}$

$x = 1 \quad\Rightarrow\quad 1 \;=\; -1(0) \;+\; B(1)(1)^2 \;+\; (C+D)(0) \;+\; (E+F)(0) \qquad\Rightarrow\quad \mathbf{B = 1}$

$x = 2 \quad\Rightarrow\quad 1 \;=\; -1(1)(9) \;+\; 1(2)(9) \;+\; (2C+D)(2)(1) \;+\; (2E+F)(2)(3)$

$\Rightarrow\quad \boxed{2C + D + 6E + 3F = -4} \qquad (1)$

$x = -1 \quad\Rightarrow\quad 1 \;=\; -1(-2)(9) + 1(-1)(9) + (-C+D)(-1)(-2) + (-E+F)(-1)(-2)(3)$

$\Rightarrow\quad \boxed{C - D + 3E - 3F = 4} \qquad (2)$

$x = 3 \quad\Rightarrow\quad 1 \;=\; -1(2)(49) + 1(3)(49) + (3C+D)(3)(2) + (3E+F)(3)(2)(7)$

$\Rightarrow\quad \boxed{3C + D + 21E + 7F = -8} \qquad (3)$

$x = -2 \quad\Rightarrow\quad 1 \;=\; -1(-3)(49) + 1(-2)(49) + (-2C+D)(-2)(-3) + (-2E+F)(-2)(-3)(7)$

$\Rightarrow\quad \boxed{2C - D + 14E - 7F = 8} \qquad (4)$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (1), (2), (3) y (4), obtenemos

$\mathbf{C = 0}$**,** $\qquad \mathbf{D = -1}$**,** $\qquad \mathbf{E = 0}$**,** $\qquad \mathbf{F = -1}$

Así

$$\int \frac{1}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}dx \quad = \quad \int \frac{1}{x(x-1)(x^2-x+1)^2}dx$$

$$\int \frac{1}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}dx \quad = \quad -\int \frac{1}{x}dx \;+\; \int \frac{1}{x-1}dx \;-\; \int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx \;-\; \int \frac{1}{x^2-x+1}dx$$

$$\int \frac{1}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}dx \quad = \quad -\,\mathrm{Ln}(x) \;+\; \mathrm{Ln}(x-1) \;-\; \int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx \;-\; \int \frac{1}{x^2-x+1}dx \quad (*)$$

Hallemos estas dos últimas integrales de $(*)$.

Para la primera, $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx$:

(i) Completemos el cuadrado del binomio en el denominador:

$$\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx \quad = \quad \int \frac{1}{[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^2}dx$$

(ii) Hagamos la sustitución $z = x - \frac{1}{2}$, $\quad \Rightarrow \quad dx = dz$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^2}dx \quad = \quad \int \frac{1}{(z^2+\frac{3}{4})^2}dz$$

(iii) Usemos el método "integración por partes":

Sea $u = \dfrac{1}{z^2+\frac{3}{4}}$, $\quad \Rightarrow \quad du = -\dfrac{2z\,dz}{(z^2+\frac{3}{4})^2}$

$dv = dz$, $\quad \Rightarrow \quad v = z$,

entonces

$$\int \frac{1}{(z^2+\frac{3}{4})^2}dz \quad = \quad \frac{z}{z^2+\frac{3}{4}} \;+\; 2\int \frac{z^2}{(z^2+\frac{3}{4})^2}dz$$

$$\int \frac{1}{(z^2+\frac{3}{4})^2}dz \quad = \quad \frac{z}{z^2+\frac{3}{4}} \;+\; 2\int \frac{z^2+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}}{(z^2+\frac{3}{4})^2}dz$$

$$\int \frac{1}{(z^2+\frac{3}{4})^2}dz \;=\; \frac{z}{z^2+\frac{3}{4}} \;+\; 2\int \frac{1}{z^2+\frac{3}{4}}dz \;-\; \frac{3}{2}\int \frac{1}{(z^2+\frac{3}{4})^2}dz$$

$$\frac{5}{2}\int \frac{1}{(z^2+\frac{3}{4})^2}dz \;=\; \frac{z}{z^2+\frac{3}{4}} \;+\; 2\int \frac{1}{z^2+\frac{3}{4}}dz$$

$$\frac{5}{2}\int \frac{1}{(z^2+\frac{3}{4})^2}dz \;=\; \frac{z}{z^2+\frac{3}{4}} \;+\; 2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2z}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

(donde se usó la fórmula Nº 12 de la Tabla Básica de Primitivas)

Despejando la integral y volviendo a la variable x **:**

$$\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx \;=\; \frac{2x-1}{5(x^2-x+1)} \;+\; \frac{8\sqrt{3}}{15}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

La segunda integral de (∗) se resuelve en forma similar**:**

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}dx \;=\; \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Finalmente, reemplazando en (∗)**:**

$$\int \frac{1}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}dx \;=\; -\,\mathrm{Ln}(x) \;+\; \mathrm{Ln}(x-1) \;-\; \int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx \;-\; \int \frac{1}{x^2-x+1}dx$$

$$\int \frac{1}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}dx \;=\; -\,\mathrm{Ln}(x) \;+\; \mathrm{Ln}(x-1) \;-\left[\frac{2x-1}{5(x^2-x+1)} \;+\; \frac{8\sqrt{3}}{15}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right] - \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

esto es,

$$\boxed{\int \frac{1}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}dx \;=\; \mathrm{Ln}\left(\frac{x-1}{x}\right) \;-\; \frac{2x-1}{5(x^2-x+1)} \;-\; \frac{6\sqrt{3}}{5}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \;+\; C_{//}}$$

(E) Método de sustituciones trigonométricas

Este método lo aplicaremos para aquellas integrales de la forma

$$\sqrt{a^2+u^2} \quad , \quad \sqrt{a^2-u^2} \quad , \quad \sqrt{u^2-a^2}$$

Hacemos un cambio de variable como sigue:

Cuando ocurre $\sqrt{a^2+u^2}$, hágase $u = a\,\mathrm{tg}\,t$, $\Rightarrow$ $du = a\sec^2 t\,dt$

Cuando ocurre $\sqrt{a^2-u^2}$, hágase $u = a\,\mathrm{sen}\,t$, $\Rightarrow$ $du = a\cos t\,dt$

Cuando ocurre $\sqrt{u^2-a^2}$, hágase $u = a\sec t$, $\Rightarrow$ $du = a\sec t\cdot\mathrm{tg}\,t\,dt$

Ejemplo 1:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

Solución: Sea $x = \mathrm{tg}\,t$, $\Rightarrow$ $dx = \sec^2 t\,dt$.

Por lo tanto,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\mathrm{tg}^2 t\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}}\sec^2 t\,dt = \int \frac{\sec t}{\mathrm{tg}^2 t}\,dt = \int \frac{\cos t\,dt}{\mathrm{sen}^2 t} \overset{v\,=\,\mathrm{sen}\,t}{=} \int \frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{\mathrm{sen}\,t} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}}{\mathrm{tg}\,t} + C$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C_{//}$$

Ejemplo 2

$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx$$

Solución: Sea $x = a\,\mathrm{tg}\,t$, $\Rightarrow$ $dx = a\sec^2 t\,dt$.

Luego, $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{a^2tg^2t+a^2}}{a\,tg\,t}a\sec^2t\,dt = a\int \frac{\sqrt{tg^2t+1}}{tg\,t}\sec^2t\,dt$$

$$= a\int \frac{\sec^3t}{tg\,t}\,dt = a\int \frac{\sec^3t}{tg\,t}\cdot\frac{tg\,t}{tg\,t}\,dt$$

$$= a\int \frac{\sec^2t\cdot(\sec t\cdot tg\,t)dt}{tg^2\,t} = a\int \frac{\sec^2t\cdot(\sec t\cdot tg\,t\,dt)}{\sec^2t-1}$$

Haciendo $u = \sec t$, $\Rightarrow$ $du = \sec t \cdot tg\,t\,dt$, tenemos

$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx = a\int \frac{u^2\,du}{u^2-1} = a\int \frac{(u^2-1)+1}{u^2-1}du = a\int du + a\int \frac{1}{(u+1)(u-1)}du$$

Descomponiendo en fracciones parciales**:**

$$\frac{1}{(u+1)(u-1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{(u+1)(u-1)} = -\frac{1}{2(u+1)} + \frac{1}{2(u-1)}$$

Así, $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx = au - \frac{a}{2}\int \frac{1}{u+1}du + \frac{a}{2}\int \frac{1}{u-1}du$$

$$= au - \frac{a}{2}\text{Ln}(u+1) + \frac{a}{2}\text{Ln}(u-1) + C = au + \frac{a}{2}\text{Ln}\left(\frac{u-1}{u+1}\right) + C$$

$$= a\sec t - \frac{a}{2}\text{Ln}\left(\frac{\sec t+1}{\sec t-1}\right) + C$$

Volviendo a la variable **x:** $x = a\,tg\,t$ $\Rightarrow$ $\sec t = \frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2}$ **.** Entonces,

$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2+a^2} - \frac{a}{2}\text{Ln}\left(\frac{\frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2}+1}{\frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2}-1}\right) + C = \sqrt{x^2+a^2} - \frac{a}{2}\text{Ln}\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}+a}{\sqrt{x^2+a^2}-a}\right) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2+a^2} - \frac{a}{2}\text{Ln}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+a^2}+a\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^2-(a)^2}\right) + C$$

(Se amplificó por el conjugado del denominador)

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\,\text{Ln}\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}+a}{x}\right) + C_{//}$$

Ejemplo 3

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}\,dx$$

Solución:

Hacemos $x = a\,\text{sen}\,t, \quad \Rightarrow \quad dx = a\cos t\,dt$. Luego

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{a^2 - a^2\text{sen}^2 t}}{a^2\text{sen}^2 t}\,a\cos t\,dt = \int \frac{\cos^2 t}{\text{sen}^2 t}\,dt = \int \frac{1 - \text{sen}^2 t}{\text{sen}^2 t}\,dt$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}\,dx = \int \text{cosec}^2 t\,dt - \int dt = -\,\text{cotg}\,t - t + C$$

Volviendo a la variable **x**: $\quad x = a\,\text{sen}\,t \Rightarrow \quad \text{cotg}\,t = \dfrac{\cos t}{\text{sen}\,t} = \dfrac{\sqrt{1 - \text{sen}^2 t}}{\text{sen}\,t}$

$$= \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}{\frac{x}{a}}$$

$$\text{cotg}\,t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

además, $x = a\,\text{sen}\,t \quad \Rightarrow \quad t = \arcsen\dfrac{x}{a}$. Luego,

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \text{arcsen}\,\frac{x}{a} + C_{//}$$

Ejemplo 4

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{9x^2 - 4}}\,dx$$

Solución:

Hagamos $3x = 2\sec t, \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2}{3}\sec t \cdot \text{tg}\,t\,dt, \qquad x^2 = \frac{4}{9}\sec^2 t$.

Entonces

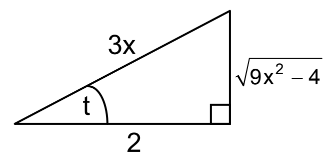
$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{9x^2-4}}\,dx \;=\; \int \frac{1}{\frac{4}{9}\sec^2 t\sqrt{4(\sec^2 t-1)}}\,\frac{2}{3}\sec t\cdot \operatorname{tg} t\,dt \;=$$

$$\frac{3}{4}\int \frac{1}{\sec^2 t\cdot \operatorname{tg} t}\sec t\cdot \operatorname{tg} t\,dt$$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{9x^2-4}}\,dx \;=\; \frac{3}{4}\int \cos t\,dt \;=\; \frac{3}{4}\operatorname{sen} t \;+\; C \qquad (\ast)$$

Volvamos a la variable original **x.** Debemos hallar <u>sen t</u> en función de <u>x</u>**:**

De $\quad 3x = 2\sec t \qquad \Rightarrow \qquad \sec t = \dfrac{3x}{2} \;\Rightarrow\; \cos t = \dfrac{2}{3x}$



Entonces dibujamos el $\measuredangle$ t en el Δ rectángulo, el

valor 2 en el cateto adyacente y el valor 3x en la hipotenusa;

por el teorema de Pitágoras, el cateto opuesto será $9x^2 - 4$**.** Luego, de la figura**:**

$$\operatorname{sen} t \;=\; \frac{\sqrt{9x^2-4}}{3x}\,.$$

Reemplazando en $(\ast)$,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{9x^2-4}}\,dx \;=\; \frac{3}{4}\,\frac{\sqrt{9x^2-4}}{3x} \;+\; C \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{1}{x^2\sqrt{9x^2-4}}\,dx \;=\; \frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{9x^2-4}}{x} \;+\; C_{//}$$

<u>Ejemplo 5</u>

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(3x+5)}}\,dx$$

<u>Solución</u>**:**

Amplificando por $\sqrt{3}$, tenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(3x+5)}}\,dx \;=\; \sqrt{3}\int \frac{1}{\sqrt{3x(3x+5)}}\,dx \;=\; \sqrt{3}\int \frac{1}{\sqrt{(3x)^2+5(3x)}}\,dx \;\overset{u\,=\,3x}{=}\; \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{\sqrt{u^2+5u}}\,du$$

$$=\; \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{\sqrt{u^2+5u+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}}\,du \;=\; \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{\sqrt{\left(u+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}}\,du$$

$$\overset{z = u + \frac{5}{2}}{=} \quad \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{\sqrt{z^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2}}\,dz \quad \overset{\text{fórmula 15)}}{=} \quad \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{Ln}\left[\, z + \sqrt{z^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2}\,\right] \quad + \; C$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x(3x+5)}}\,dx \;=\; \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{Ln}\left[\, 3x + \frac{5}{2} \;+\; \sqrt{\left(3x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2}\,\right] \quad + \; C$$

Amplificando por 2 el lado derecho, lo podemos escribir como**:**

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(3x+5)}}\,dx \;=\; \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\text{Ln}\left[\sqrt{3x + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(3x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2}}\,\right] \quad + \; C \qquad (\ast)$$

Finalmente, recordando de Enseñanza Media la transformación de raíces**:**

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} \;=\; \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \;+\; \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

y haciendo en $(\ast)$ $\;a \equiv 3x + \frac{5}{2}$, $\;\; b \equiv \left(3x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$, tenemos la solución simplificada

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(3x+5)}}\,dx \;=\; \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\text{Ln}\left[\sqrt{3x} + \sqrt{3x+5}\,\right] \quad + \; K_{//}$$

(F) <u>Método para integrales binomiales</u>

Son integrales del tipo $\int x^m (a + bx^n)^{p/q}\,dx$, con $m, n, p, q \quad \mathbb{Z} - \{0\}$**.**

Si bien en general admiten una fórmula de reducción, en algunos casos pueden abordarse directamente haciendo el cambio de variable

a) $\quad (a + bx^n) = u^q$, si $\frac{m+1}{n} \quad \mathbb{Z}$

b) $\quad \frac{a + bx^n}{x^n} = v^q$, $\quad$ si $\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q} \quad \mathbb{Z}$

<u>Ejemplos</u>

1) $\quad \int x^5 (1 + x^3)^{2/3}\,dx$

<u>Solución</u>**:**

Como $\frac{m+1}{n} = \frac{5+1}{3} = 2 \quad \mathbb{Z}$, hagamos $(1 + x^3) = u^3, \Rightarrow \quad x^3 = u^3 - 1; \qquad 3x^2dx = 3u^2du$.

$$\int x^5(1+x^3)^{2/3}\,dx = \int x^3(1+x^3)^{2/3}x^2\,dx = \int (u^3-1)\cdot u^2\cdot u^2\,du = \int (u^7-u^4)\,du$$

$$\int x^5(1+x^3)^{2/3}\,dx = \frac{1}{8}u^8 - \frac{1}{5}u^5 + C$$

Volviendo a la variable **x**,

$$\int x^5(1+x^3)^{2/3}\,dx = \frac{1}{8}(1+x^3)^{8/3} - \frac{1}{5}(1+x^3)^{5/3} + C_{//}$$

2) $\quad \int x^{1/3}(2+x^{2/3})^{1/4}\,dx$

<u>Solución</u>:

Como $\frac{m+1}{n} = 2 \quad \mathbb{Z}$, hacemos $(2 + x^{2/3}) = u^4, \quad \Rightarrow \quad x^{2/3} = u^4 - 2; \qquad \frac{2}{3}x^{-1/3}dx = 4u^3du$

$$\int x^{1/3}(2+x^{2/3})^{1/4}\,dx = \int x^{2/3}(2+x^{2/3})^{1/4}x^{-1/3}\,dx = \int (u^4-2)\cdot u\cdot 6u^3\,du = 6\int (u^8-2u^4)\,du$$

$$= 6\left(\frac{1}{9}u^9 - \frac{2}{5}u^5\right) + C$$

Volviendo a la **x**,

$$\int x^{1/3}(2+x^{2/3})^{1/4}\,dx = \frac{2}{3}(2+x^{2/3})^{9/4} - \frac{12}{5}(2+x^{2/3})^{5/4} + C_{//}$$

3) $\quad \int \frac{1}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx$

<u>Solución</u>:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx = \int x^{-2}(1+x^2)^{-3/2}\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{m+1}{n} = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{m+1}{n} + \frac{p}{q} = -2 \quad \mathbb{Z}$$

luego, hacemos $\frac{1+x^2}{x^2} = v^2$.

Despejando **x**: $\quad x = (v^2-1)^{-1/2}, \quad \Rightarrow \quad dx = -v(v^2-1)^{-3/2}dv; \qquad x^{-2} = v^2 - 1$.

Sustituyendo en la integral dada,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}dx \;=\; \int x^{-2}(1+x^2)^{-3/2}\,dx \;=\; \int (v^2-1)\left(\frac{v^2}{v^2-1}\right)^{-3/2}(-v(v^2-1)^{-3/2}dv)$$

$$= -\int v\,(v^2-1)\,v^{-3}\,dv \;=\; -\int (1-v^{-2})\,dv \;=\; -v \;-\; \frac{1}{v} \;+\; C$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}dx \;=\; -\;\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \left[+\;\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \;+\; C_{//}\right]$$

4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

<u>Solución</u>:

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx \;=\; \int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{1/2}\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m+1}{n} \;=\; 1.$$

Luego, hacemos $(1 + x^{1/3}) = u^2$, $\Rightarrow$ $\frac{1}{3}x^{-2/3}dx = 2u\,du$. Entonces:

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx \;=\; \int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{1/2}\,dx \;=\; \int 6u^2\,du \;=\; 2\,u^3 \;+\; C$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx \;=\; 2\,(1 + x^{1/3})^{3/2} \;+\; C_{//}$$

(G) Para las integrales irracionales de la forma $\displaystyle\int f(x^{p/q}, x^{r/s})\,dx$, hacemos $x = u^{qs}$, ó bien

poniendo el M.C.M. entre ***q*** y ***p*** como exponente de **u**.

<u>Ejemplo</u>

Hallar $\displaystyle\int \frac{x^{1/2}}{x^{3/4}+1}dx$

<u>Solución</u>: Hacemos $x = u^4$, $\Rightarrow$ $dx = 4u^3du$. Luego,

$$\int \frac{x^{1/2}}{x^{3/4}+1}dx = \int \frac{u^2}{u^3+1}4u^3du = 4\int \frac{u^5}{u^3+1}du = 4\int \frac{(u^3)u^2}{u^3+1}du = 4\int \frac{(u^3+1-1)u^2}{u^3+1}du$$

$$\int \frac{x^{1/2}}{x^{3/4}+1}dx = 4\int \left(u^2 - \frac{u^2}{u^3+1}\right)du = 4\int u^2\,du - \frac{4}{3}\int \frac{3u^2}{u^3+1}du$$

$$= \frac{4u^3}{3} - \frac{4}{3}\mathrm{Ln}(u^3+1) + C$$

Volviendo a la variable **x**, tenemos finalmente

$$\int \frac{x^{1/2}}{x^{3/4}+1}dx = \frac{4}{3}\left(x^{3/4} - \mathrm{Ln}(x^{3/4}+1)\right) + C_{//}$$

(H) Para las integrales racionales del tipo $\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$, hacemos el cambio $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Esto implica**:** $\operatorname{sen} x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx = \frac{2}{1+u^2}du$ **.**

Ejemplo $\int \frac{1}{4-5\operatorname{sen} x}dx$

Solución**:**

$$\int \frac{1}{4-5\operatorname{sen} x}dx = \int \frac{1}{4-5\frac{2u}{1+u^2}}\left(\frac{2}{1+u^2}du\right)$$

$$= \int \frac{2}{4(1+u^2)-10u}du$$

$$= \frac{2}{4}\int \frac{1}{u^2-\frac{5}{2}u+1}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(u-\frac{5}{4})^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2}du \text{ .}$$

Usando la Tabla básica de Primitivas, tenemos

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\left(\frac{3}{4}\right)}\,\mathrm{Ln}\left|\frac{u-\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}{u-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}\right| + C \qquad = \qquad \frac{1}{3}\,\mathrm{Ln}\left|\frac{u-2}{u-\frac{1}{2}}\right| + C$$

Finalmente, volviendo a la **x**,

$$\int \frac{1}{4-5\,\mathrm{sen}\,x}\,dx \;=\; \frac{1}{3}\,\mathrm{Ln}\left|\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-2}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}\right| + C_{//}$$

(I) Integrales trigonométricas

Son integrales del tipo

a) $\int \mathrm{sen}^n x\,\cos^m x\,dx$ b) $\int \sec^n x\,\mathrm{tg}^m x\,dx$ c) $\int \mathrm{sen}(nx)\cos(mx)\,dx$, y otras**.**

a) **i)** $\int \mathrm{sen}^n x\,dx$, con *n* impar**.**

Ejemplo**:** $\int \mathrm{sen}^7 x\,dx$

Solución**:**

$\int \mathrm{sen}^7 x\,dx = \int \mathrm{sen}^6 x\,(\mathrm{sen}\,x\,dx) = \int (1-\cos^2 x)^3\,d(-\cos x)$ **.** Haciendo $u = \cos x$,

se tiene

$$= -\int (1-u^2)^3\,du = -\int (1-3u^2+3u^4-u^6)\,du$$

$$= -u + u^3 - \frac{3}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + C$$

$$\Rightarrow \qquad \int \mathrm{sen}^7 x\,dx = -\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos x + C_{//}$$

ii) $\int \text{sen}^n x\, dx$, con *n* impar.

Ejemplo: $\int \text{sen}^4 x\, dx$

Solución:

Como se sabe, existe una fórmula de reducción; pero, para exponentes "pequeños" como aquí, podemos resolverla directamente.

$$\int \text{sen}^4 x\, dx = \int \left(\text{sen}^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\left(d(2x)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left[(2x) - 2\,\text{sen}\,2x + \frac{1}{2}(2x + \text{sen}\,2x\cos 2x)\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\text{sen}\,x\cos x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\left[2\,\text{sen}\,x\cos x(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)\right] + C$$

$$\Rightarrow \int \text{sen}^4 x\, dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{2}\text{sen}\,x\cos x + \frac{1}{8}\text{sen}\,x\cos x(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) + C_{//}$$

iii) $\int \text{sen}^n x \cos^m x\, dx$, con *m* ó *n* impar.

Ejemplo: $\int \text{sen}^3 x \cos^2 x\, dx$

Solución:

$$\int \text{sen}^3 x\cos^2 x\, dx = \int \text{sen}^2 x\cos^2 x\,(\text{sen}\,x\, dx)$$

$$= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\,(-\,d\cos x)$$. Haciendo el cambio $u = \cos x$:

$$= -\int (1-u^2)\,u^2\, du = -\int (u^2-u^4)\, du$$

$$= -\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right) + C$$

$$\Rightarrow \qquad \int \text{sen}^3x \cos^2x \, dx = \frac{\cos^5x}{5} - \frac{\cos^3x}{3} + C_{//}$$

iv) $\int \text{sen}^n x \cos^m x \, dx$, con m y n par**.**

Ejemplo**:** $\int \text{sen}^4x \cos^2x \, dx$

También permite una fórmula de reducción; pero la podemos abordar sin ella, puesto que los exponentes son "pequeños"**.**

Solución**:** $$\int \text{sen}^4x \cos^2x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$\int \text{sen}^4x \cos^2x \, dx = \frac{1}{8} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[x - \frac{1}{2}\text{sen}\, 2x - \frac{1}{4}(2x + \text{sen}\, 2x \cos 2x)\right] + \frac{1}{8}\int \cos^3 2x \, dx \quad (\ast)$$

Pero, $$\int \cos^3 2x \, dx = \frac{1}{2}\int \cos^2 2x \,(\cos 2x \, d(2x)) = \frac{1}{2}\int (1 - \text{sen}^2 2x) \, d(\text{sen}\, 2x)$$

$u = \text{sen}\, 2x \quad \Rightarrow$ $$= \frac{1}{2}\int (1 - u^2) \, du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{6}u^3$$

$$= \frac{1}{2}\text{sen}\, 2x - \frac{1}{6}\text{sen}^3 2x.$$ Así, reemplazando en $(\ast)$**:**

$$\int \text{sen}^4x \cos^2x \, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\text{sen}\, 2x - \frac{1}{32}(2x + \text{sen}\, 2x \cos 2x) + \frac{1}{16}\text{sen}\, 2x - \frac{1}{48}\text{sen}^3 2x + C$$

Reduciendo y simplificando, tenemos finalmente

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\, dx \;=\; \frac{1}{16}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 2x \cos 2x - \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C_{//}$$

b) La integral del tipo $\int \sec^{2n} x\, dx$ tiene solución directa; pero si el exponente es impar, se llega a una fórmula de reducción.

Ejemplo:

$$\int \sec^4 x\, dx$$

Solución:

$$\int \sec^4 x\, dx = \int \sec^2 x\,(\sec^2 x\, dx) = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)\, d(\operatorname{tg} x) \overset{u\,=\,\operatorname{tg} x}{=} \int (1+u^2)\, du = u + \frac{1}{3}u^3 + C$$

$$\Rightarrow \qquad \int \sec^4 x\, dx = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C_{//}$$

También es directa $\int \sec^n x\, \operatorname{tg}^{2m+1} x\, dx$

Ejemplo:

$$\int \sec^3 x\, \operatorname{tg}^3 x\, dx$$

Solución:

$$\int \sec^3 x\, \operatorname{tg}^3 x\, dx = \int (\sec^2 x\, \operatorname{tg}^2 x)(\sec x\, \operatorname{tg} x)\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\,(\sec^2 x - 1)\, d(\sec x) \overset{u\,=\,\sec x}{=} \int u^2\,(u^2 - 1)\, du$$

$$= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + C$$

$$\Rightarrow \qquad \int \sec^3 x\, \operatorname{tg}^3 x\, dx = \frac{1}{5}\sec^5 x - \frac{1}{3}\sec^3 x + C_{//}$$

c) **Las integrales del tipo** $\int \operatorname{sen}(nx)\cos(mx)\, dx$ se abordan teniendo presente las identidades

i) $\quad \operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$

ii) $\quad \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$

iii) $\quad \cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

<u>Ejemplos</u>

a) $\int \operatorname{sen} 2x \cos 3x \, dx$

Solución**:**

$$\int \operatorname{sen} 2x \cos 3x \, dx = \frac{1}{2}\int (\cos x - \cos 5x)\, dx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x) + C_{//}$$

b) $\int \cos 4x \cos 2x \, dx$

Solución**:**

$$\int \cos 4x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 6x + \cos 2x)\, dx = \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C_{//}$$

(J) <u>Fórmulas de reducción</u>

Determinaremos fórmulas de reducción para integrales del tipo

a) $\int \cos^{2n}x \, dx$ ó $\int \operatorname{sen}^{2n}x \, dx$; b) $\int \operatorname{sen}^{2n}x \cos^{2m}x \, dx$

c) $\int \operatorname{tg}^{n}x \, dx$ d) $\int \sec^{n}x \, dx$

a) $\int \cos^{2n}x \, dx = \int \underbrace{\cos^{2n-1}x}_{\mathbf{u}} \underbrace{(\cos x \, dx)}_{\mathbf{dv}}$

Integrando por partes, $u = \cos^{2n-1}x \Rightarrow du = (2n-1)\cos^{2n-2}x\,(-\operatorname{sen} x \, dx)$

$dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x$

tenemos

$$\int \cos^{2n}x\,dx \;=\; \cos^{2n-1}x\cdot \operatorname{sen}x \;+\; (2n-1)\int \cos^{2n-2}x\,\operatorname{sen}^2x\,dx$$

$$\int \cos^{2n}x\,dx \;=\; \cos^{2n-1}x\cdot \operatorname{sen}x \;+\; (2n-1)\int \cos^{2n-2}x\;(1-\cos^2x)\,dx$$

$$\int \cos^{2n}x\,dx \;=\; \cos^{2n-1}x\cdot \operatorname{sen}x \;+\; (2n-1)\int \cos^{2n-2}x\,dx \;-\; (2n-1)\int \cos^{2n}x\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int \cos^{2n}x\,dx \;=\; \frac{1}{2n}\,\cos^{2n-1}x\cdot \operatorname{sen}x \;+\; \frac{2n-1}{2n}\int \cos^{2n-2}x\,dx}$$

b) $$\int \operatorname{sen}^{2n}x\,\cos^{2m}x\,dx \;=\; \int \underbrace{\operatorname{sen}^{2n-1}x}_{\mathbf{u}}\,\underbrace{(\cos^{2m}x\;\operatorname{sen}x\,dx)}_{\mathbf{dv}}\ .$$

Integrando por partes, $\quad u = \operatorname{sen}^{2n-1}x \quad \Rightarrow \quad du = (2n-1)\operatorname{sen}^{2n-2}x\ c$

$$dv = \cos^{2m}x\,\operatorname{sen}x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{\cos^{2m+1}x}{2m+1}$$

se tiene

$$\int \operatorname{sen}^{2n}x\,\cos^{2m}x\,dx \;=\; -\frac{\operatorname{sen}^{2n-1}x\cos^{2m+1}x}{2m+1} \;+\; \frac{2n-1}{2m+1}\int \operatorname{sen}^{2n-2}x\,\cos^{2m}x\,(1-\operatorname{sen}^2x)\,dx$$

$$\int \operatorname{sen}^{2n}x\,\cos^{2m}x\,dx \;=-\frac{\operatorname{sen}^{2n-1}x\cos^{2m+1}x}{2m+1} + \frac{2n-1}{2m+1}\int \operatorname{sen}^{2n-2}x\,\cos^{2m}x\,dx \;-$$

$$\frac{2n-1}{2m+1}\int \operatorname{sen}^{2n}x\,\cos^{2m}x\,dx \;\;(1+\frac{2n-1}{2m+1})\int \operatorname{sen}^{2n}x\,\cos^{2m}x\,dx \;=\; -\frac{\operatorname{sen}^{2n-1}x\cos^{2m+1}x}{2m+1} \;+$$

$$\frac{2n-1}{2m+1}\int \operatorname{sen}^{2n-2}x\,\cos^{2m}x\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \operatorname{sen}^{2n}x\,\cos^{2m}x\,dx \;=\; \frac{2m+1}{2n+2m}\left[-\frac{\operatorname{sen}^{2n-1}x\cos^{2m+1}x}{2m+1} \;+\; \frac{2n-1}{2m+1}\int \operatorname{sen}^{2n-2}x\;\cos^{2m}x\,dx\right]$$

c) $$\int \operatorname{tg}^{n}x\,dx \;=\; \int \operatorname{tg}^{n-2}x\,\operatorname{tg}^2x\,dx \;=\; \int \operatorname{tg}^{n-2}x\,(\sec^2x-1)\,dx$$

$$= \int tg^{n-2}x \sec^2 x\, dx - \int tg^{n-2}x\, dx$$

$$= \int tg^{n-2}x\, d(tg\, x) - \int tg^{n-2}x\, dx$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int tg^n x\, dx = \frac{tg^{n-1}x}{n-1} - \int tg^{n-2}x\, dx}$$

d) $$\int \sec^n x\, dx = \int \sec^{n-2}x \sec^2 x\, dx$$

Integrando por partes, $u = \sec^{n-2}x \Rightarrow du = (n-2)\sec^{n-3}x \sec x\, tg\, x\, dx$

$dv = \sec^2 x\, dx \Rightarrow v = tg\, x$

se tiene

$$\int \sec^n x\, dx = \sec^{n-2}x \cdot tg\, x - (n-2)\int \sec^{n-2}x\, tg^2 x\, dx$$

$$= \sec^{n-2}x \cdot tg\, x - (n-2)\int \sec^{n-2}x\, (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$\int \sec^n x\, dx = \sec^{n-2}x \cdot tg\, x - (n-2)\int \sec^n x\, dx + (n-2)\int \sec^{n-2}x\, dx$$

$$(n-1)\int \sec^n x\, dx = \sec^{n-2}x \cdot tg\, x + (n-2)\int \sec^{n-2}x\, dx$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int \sec^n x\, dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x \cdot tg\, x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\, dx}$$

Apliquemos algunas de estas fórmulas de reducción.

Resolver:

1) $$\int \cos^6 x\, dx$$

Solución:

$$\int \cos^6 x\,dx = \frac{1}{6}\cos^5 x\cdot \operatorname{sen} x + \frac{5}{6}\int \cos^4 x\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\cos^5 x\cdot \operatorname{sen} x + \frac{5}{6}\left[\frac{1}{4}\cos^3 x\cdot \operatorname{sen} x + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{6}\cos^5 x\cdot \operatorname{sen} x + \frac{5}{24}\cos^3 x\cdot \operatorname{sen} x + \frac{5}{8}\int \cos^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\cos^5 x\cdot \operatorname{sen} x + \frac{5}{24}\cos^3 x\cdot \operatorname{sen} x + \frac{5}{8}\left[\frac{1}{2}\cos x\cdot \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}x\right] + C$$

$$\Rightarrow \int \cos^6 x\,dx = \frac{1}{6}\cos^5 x\cdot \operatorname{sen} x + \frac{5}{24}\cos^3 x\cdot \operatorname{sen} x + \frac{5}{16}\cos x\cdot \operatorname{sen} x + \frac{5}{16}x + C_{//}$$

2) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\cos^6 x\,dx$

Solución:

$$\int \operatorname{sen}^4 x\cos^6 x\,dx = -\frac{1}{10}\operatorname{sen}^3 x\cdot\cos^7 x + \frac{3}{10}\int \operatorname{sen}^2 x\cos^6 x\,dx$$

$$= -\frac{1}{10}\operatorname{sen}^3 x\cdot\cos^7 x + \frac{3}{10}\left[-\frac{1}{8}\operatorname{sen} x\cdot\cos^7 x + \frac{1}{8}\int \cos^6 x\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{10}\operatorname{sen}^3 x\cdot\cos^7 x - \frac{3}{80}\operatorname{sen} x\cdot\cos^7 x + \frac{3}{80}\left[\frac{1}{6}\cos^5 x\cdot \operatorname{sen} x + \frac{5}{24}\cos^3 x\cdot \operatorname{sen} x + \frac{5}{16}\cos x\cdot \operatorname{sen} x + \frac{5}{16}x\right] + C$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{sen}^4 x\cos^6 x\,dx = -\frac{1}{10}\operatorname{sen}^3 x\cdot\cos^7 x - \frac{3}{80}\operatorname{sen} x\cdot\cos^7 x + \frac{1}{160}\cos^5 x\cdot \operatorname{sen} x$$

$$\frac{1}{128}\cos^3 x\cdot \operatorname{sen} x + \frac{3}{256}\cos x\cdot \operatorname{sen} x + \frac{3}{256}x + C$$

3) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$

Solución**:**

$$\int tg^5x\,dx = \frac{tg^4x}{4} - \int tg^3x\,dx$$

$$= \frac{tg^4x}{4} - \left[\frac{tg^2x}{2} - \int tg\,x\,dx\right]$$

$$\Rightarrow \qquad \int tg^5x\,dx = \frac{tg^4x}{4} - \frac{tg^2x}{2} + Ln\,(sec\,x) + C_{//}$$

========== 0000000000 ==========

GUÍA #1.-Ejercicios Propuestos.-

I) **<u>Evalúe las integrales y compruebe su resultado por derivación</u>**

1) $\int x\,e^{-x}\,dx$ 2) $\int x\,sen\,x\,dx$ 3) $\int x^2\,e^{-3x}\,dx$

4) $\int x^2\,sen\,4x\,dx$ 5) $\int x\,cos\,5x\,dx$ 6) $\int x\,e^{-2x}\,dx$

7) $\int x\,sec\,x\,tg\,x\,dx$ 8) $\int x\,cosec^2\,3x\,dx$ 9) $\int x^2\,cos\,x\,dx$

10) $\int x^3\,e^{-x}\,dx$ 11) $\int arctg\,x\,dx$ 12) $\int arcsen\,x\,dx$

13) $\int \sqrt{x}\,Ln\,x\,dx$ 14) $\int x^2\,Ln\,x\,dx$ 15) $\int x\,cosec^2\,x\,dx$

16) $\int x\,arctg\,x\,dx$ 17) $\int e^{-x}\,sen\,x\,dx$ 18) $\int e^{3x}\,cos\,2x\,dx$

19) $\int sen\,x\,Ln(cos\,x)\,dx$ 20) $\int x^3\,e^{-x^3}\,dx$ 21) $\int sec^3\,x\,dx$

22) $\int \sec^5 x \, dx$

23) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$

24) $\int \text{sen}(\text{Ln}\, x) \, dx$

25) $\int x \, \text{sen}\, 2x \, dx$

26) $\int x \sec^2 x \, dx$

27) $\int x \, (2x+3)^{99} \, dx$

28) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^3}} \, dx$

29) $\int e^{4x} \, \text{sen}\, 5x \, dx$

30) $\int x^3 \cos x^2 \, dx$

31) $\int (\text{Ln}\, x)^2 \, dx$

32) $\int x \, 2^x \, dx$

33) $\int x^3 \, \text{senh}\, x \, dx$

34) $\int (x+4) \cosh 4x \, dx$

35) $\int \cos \sqrt{x} \, dx$

36) $\int \arccos 3x \, dx$

37) $\int x \arccos x \, dx$

38) $\int (x+1)^{10} \, (x+2) \, dx$

39) $\int \cos(\text{Ln}\, x) \, dx$

II) **Use integración por partes para deducir las cuatro siguientes fórmulas de reducción**

40) $\int x^m \, e^x \, dx \;=\; x^m \, e^x \;-\; m \int x^{m-1} \, e^x \, dx$

41) $\int x^m \, \text{sen}\, x \, dx \;=\; -\, x^m \cos x \;+\; m \int x^{m-1} \cos x \, dx$

42) $\int (\text{Ln}\, x)^m \, dx \;=\; x \, (\text{Ln}\, x)^m \;-\; m \int (\text{Ln}\, x)^{m-1} \, dx$

43) $\int \sec^m x \, dx \;=\; \frac{\sec^{m-2} x \, \text{tg}\, x}{m-1} \;+\; \frac{m-2}{m-1} \int \sec^{m-2} x \, dx$ (con $m \neq -1$)

44) Use el ejercicio 40) para evaluar $\int x^5 \, e^x \, dx$

45) Emplee el ejercicio 42) para evaluar $\int (\text{Ln}\, x)^4 \, dx$

III) **Calcule las integrales**

1) $\int \cos^3 x\, dx$

2) $\int \operatorname{sen}^2 2x\, dx$

3) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$

4) $\int \cos^7 x\, dx$

5) $\int \cos^3 x \cos^2 x\, dx$

6) $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x\, dx$

7) $\int \operatorname{sen}^6 x\, dx$

8) $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\, dx$

9) $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x\, dx$

10) $\int \sec^6 x\, dx$

11) $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x\, dx$

12) $\int \operatorname{tg}^5 x \sec x\, dx$

13) $\int \operatorname{tg}^6 x\, dx$

14) $\int \operatorname{cotg}^4 x\, dx$

15) $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\, \cos^3 x\, dx$

16) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx$

17) $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)^2\, dx$

18) $\int \operatorname{cotg}^3 x \operatorname{cosec}^3 x\, dx$

19) $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$

20) $\int x \operatorname{tg}^2 \left(\frac{1}{4}\pi x\right) dx$

21) $\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 3x\, dx$

22) $\int \cos x \cos 5x\, dx$

23) $\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x\, dx$

24) $\int \operatorname{sen} 4x \cos 3x\, dx$

25) $\int \operatorname{cotg}^4 x \operatorname{cosec}^4 x\, dx$

26) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$

27) $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2}\, dx$

28) $\int \frac{1}{x\sqrt{9 + x^2}}\, dx$

29) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9 + x^2}}\, dx$

30) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 25}}\, dx$

31) $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2 - 25}}\, dx$

32) $\int \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$

33) $\int \frac{x}{x^2 + 9}\, dx$

34) $\int \frac{1}{\left(x^2 - 1\right)^{3/2}}\, dx$

35) $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 - 25}}\, dx$

36) $\int \frac{1}{\left(x^2 + 36\right)^2}\, dx$

37) $\int \frac{1}{\left(16-x^2\right)^{5/2}}\,dx$ 38) $\int \sqrt{9-4x^2}\,dx$ 39) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$

40) $\int \frac{x}{\left(16-x^2\right)^2}\,dx$ 41) $\int x\sqrt{x^2-9}\,dx$ 42) $\int \frac{x^3}{\sqrt{9x^2+49}}\,dx$

43) $\int \frac{1}{x\sqrt{25x^2+16}}\,dx$ 44) $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-3}}\,dx$ 45) $\int \frac{x^2}{\left(1-9x^2\right)^{3/2}}\,dx$

46) $\int \frac{(4+x^2)^2}{x^3}\,dx$ 47) $\int \frac{3x-5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 48) $\int \frac{x^4+2x^2+4x+1}{(x^2+1)^3}\,dx$

49) $\int \frac{x^3+3x-2}{x^2-x}\,dx$ 50) $\int \frac{x^4+2x^2+3}{x^3-4x}\,dx$ 51) $\int \frac{x^6-x^3+1}{x^4+9x^2}\,dx$

52) $\int \frac{x^5}{(x^2+4)^2}\,dx$ 53) $\int \frac{1}{a^2-u^2}\,du$ 54) $\int \frac{2x^4+3x^3+3x^2-3x-1}{x^2(x+1)^3}\,dx$

55) $\int \frac{4x^3+2x^2-5x-18}{(x-4)(x+1)^3}\,dx$ 56) $\int \frac{10x^2+9x+1}{2x^3+3x^2+x}\,dx$ 57) $\int \frac{2x^3-5x^2+46x+98}{(x^2+x-12)^2}\,dx$

58) $\int \frac{x^5-x^4-2x^3+4x^2-15x+5}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx$ 59) $\int \frac{2x^4-2x^3+6x^2-5x+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$

60) $\int \frac{1}{u\,(a+bu)}\,du$ 61) $\int \frac{1}{u^2\,(a+bu)}\,du$ 62) $\int \frac{1}{u\,(a-bu)}\,du$

IV) **Calcule las integrales usando descomposición en fracciones parciales**

1) $\int \frac{5x-12}{x\,(x-4)}\,dx$ 2) $\int \frac{x+34}{(x-6)(x+2)}\,dx$ 3) $\int \frac{37-11x}{(x+1)(x-2)(x-3)}\,dx$

4) $\int \frac{4x^2+54x+134}{(x-1)(x+5)(x+3)}\,dx$ 5) $\int \frac{6x-11}{(x-1)^2}\,dx$ 6) $\int \frac{19x^2-50x+25}{x^2\,(5-3x)}\,dx$

7) $\int \frac{x+16}{x^2+2x-8}\,dx$ 8) $\int \frac{11x+2}{2x^2-5x-3}\,dx$ 9) $\int \frac{5x^2-10x-8}{x^3-4x}\,dx$

10) $\displaystyle\int \frac{4x^2-5x-15}{x^3-4x^2-5x}\,dx$ 11) $\displaystyle\int \frac{2x^2-25x-33}{(x+1)^2(x-5)}\,dx$ 12) $\displaystyle\int \frac{2x^2-12x+4}{x^3-4x^2}\,dx$

13) $\displaystyle\int \frac{9x^4+17x^3+3x^2-8x+3}{x^5-3x^4}\,dx$ 14) $\displaystyle\int \frac{5x^2+30x+43}{(x+3)^3}\,dx$ 15) $\displaystyle\int \frac{4x}{(x^2+1)^3}\,dx$

15) $\displaystyle\int \frac{x^3+3x^2+3x+63}{(x^2-9)^2}\,dx$ 16) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-7)^5}\,dx$ 17) $\displaystyle\int \frac{5x^2+11x+17}{x^3-x^2+4x+20}\,dx$

18) $\displaystyle\int \frac{4x^3-3x^2+6x-27}{x^4+9x^2}\,dx$ 19) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+1}{x^4+5x^2+4}\,dx$ 20) $\displaystyle\int \frac{2x^3+10x}{(x^2+1)^2}\,dx$

V) <u>Utilice las fórmulas siguientes después de completar el cuadrado del denominador</u>

i) $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2u^2}}\,du = \frac{1}{b}\,\text{Ln}\left[bu + \sqrt{a^2+b^2u^2}\right] + C$$

ii) $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2u^2}}\,du = \frac{1}{b}\,\text{arcsen}\left(\frac{bu}{a}\right) + C$$ (con $|bu| < |a|$)

iii) $$\int \frac{1}{\sqrt{b^2u^2-a^2}}\,du = \left[\frac{1}{b}\,\text{Ln}\;bu + \sqrt{b^2u^2-a^2}\right] + C$$

iv) $$\int \frac{1}{a^2+b^2u^2}\,du = \frac{1}{ab}\,\text{arctg}\left(\frac{bu}{a}\right) + C$$

v) $$\int \frac{1}{a^2-b^2u^2}\,du = \frac{1}{2ab}\,\text{Ln}\left(\frac{a+bu}{a-bu}\right) + C$$

1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{7+6x-x^2}}\,dx$ 3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$ 5) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{\sqrt{9-8x-x^2}}\,dx$ 6) $\displaystyle\int \frac{x+5}{9x^2+6x+17}\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$ 8) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3-1}\,dx$ 9) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx$

10) $\int \frac{1}{x^4 - 4x^3 + 13x^2}\,dx$

11) $\int \frac{1}{(x^2 + 6x + 13)^{3/2}}\,dx$

12) $\int \sqrt{x(6 - x)}\,dx$

13) $\int \frac{1}{2x^2 - 3x + 9}\,dx$

14) $\int \frac{2x}{(x^2 + 2x + 5)^2}\,dx$

15) $\int \frac{2x^2 - 4x + 6}{x^2 - 4x + 5}\,dx$

16) $\int \frac{x}{2x^2 + 3x - 4}\,dx$

17) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2}\,dx$

18) $\int \frac{x - 1}{x^2 + x + 1}\,dx$

19) $\int x\,\sqrt[3]{x + 9}\,dx$

20) $\int x\,\sqrt[3]{2x + 1}\,dx$

21) $\int \frac{x}{\sqrt[5]{3x + 2}}\,dx$

22) $\int \frac{5x}{(x + 3)^{2/3}}\,dx$

23) $\int \frac{1}{\sqrt{x} + 4}\,dx$

24) $\int \frac{1}{\sqrt{4 + \sqrt{x}}}\,dx$

25) $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}\,dx$

26) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x}}\,dx$

27) $\int \frac{1}{(x + 1)\sqrt{x - 2}}\,dx$

28) $\int \frac{2x + 3}{\sqrt{2x + 1}}\,dx$

29) $\int \frac{x + 1}{(x + 4)^{1/3}}\,dx$

30) $\int \frac{x^{1/3} + 1}{x^{1/3} - 1}\,dx$

31) $\int e^{3x}\sqrt{1 + e^x}\,dx$

32) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{1 + e^x}}\,dx$

33) $\int \frac{e^{2x}}{e^x + 4}\,dx$

34) $\int \operatorname{sen}\sqrt{4 + x}\,dx$

35) $\int \frac{x}{(x - 1)^6}\,dx$
(Sugerencia: tome u = x – 1)

36) $\int \frac{x^2}{(3x + 4)^{10}}\,dx$
(Sugerencia: tome u = 3x + 4)

37) $\int \frac{1}{2 + \operatorname{sen} x}\,dx$

38) $\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}\,dx$

39) $\int \frac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x}\,dx$

40) $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}\,dx$

41) $\int \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx$

42) $\int \frac{\sec x}{4 - 3\operatorname{tg} x}\,dx$

VI) **<u>Explique las siguientes técnicas de integración</u>:**

1.- Integración por partes.

2.- Sustituciones trigonométricas.

3.- Integración de funciones racionales.

4.- Integración en que aparecen expresiones cuadráticas.

VII) Resuelva las integrales:

1) $\int x \arcsen x \, dx$ 2) $\int sen^3(3x) \, dx$ 3) $\int Ln(1+x) \, dx$

4) $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$ 5) $\int cos^3(2x) \, sen^2(2x) \, dx$ 6) $\int cos^4 x \, dx$

7) $\int tg\, x \sec^5 x \, dx$ 8) $\int tg\, x \sec^6 x \, dx$ 9) $\int \frac{1}{(x^2+25)^{3/2}} \, dx$

10) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}} \, dx$ 11) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \, dx$ 12) $\int \frac{x}{(x^2+1)^2} \, dx$

13) $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} \, dx$ 14) $\int \frac{1}{x+x^3} \, dx$ 15)

$\int \frac{x^3-20x^2-63x-198}{x^4-8} \, dx$

16) $\int \frac{x-1}{(x+2)^5} \, dx$ 17) $\int \frac{x}{\sqrt{4+4x-x^2}} \, dx$ 18) $\int \frac{x}{x^2+6x+13} \, dx$

19) $\int \frac{\sqrt[3]{x+8}}{x} \, dx$ 20) $\int \frac{sen\, x}{2\cos x+3} \, dx$ 21) $\int e^{2x} \, sen(3x) \, dx$

22) $\int \cos(Ln\, x) \, dx$ 23) $\int sen^3 x \cos^3 x \, dx$ 24) $\int cotg^2(3x) \, dx$

25) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \, dx$ 26) $\int \frac{1}{x\sqrt{9x^2+4}} \, dx$ 27) $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^3+2x^2} \, dx$

28) $\int \frac{x^3}{x^3-3x^2+9x-27} \, dx$ 29) $\int \frac{1}{x^{3/2}+x^{1/2}} \, dx$ 30) $\int \frac{2x+1}{(x+5)^{100}} \, dx$

31) $\int e^x \sec(e^x)\, dx$

32) $\int x\, tg(x^2)\, dx$

33) $\int x^2 \,sen\, 5x\, dx$

34) $\int sen\, 2x \cos x\, dx$

35) $\int sen^3 x \cos^{1/2} x\, dx$

36) $\int sen\, 3x\, cotg\, 3x\, dx$

37) $\int e^x \sqrt{1+e^x}\, dx$

38) $\int \frac{x}{\sqrt{4x^2+25}}\, dx$

39) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4x^2+25}}\, dx$

40) $\int \frac{3x+2}{x^2+8x+25}\, dx$

41) $\int \sec^2 x\, tg^2 x\, dx$

42) $\int sen^2 x \cos^5 x\, dx$

43) $\int x\, cotg\, x\, cosec\, x\, dx$

44) $\int (1+cosec\, 2x)^2\, dx$

45) $\int x^2 (8-x^3)^{1/3}\, dx$

46) $\int x\, (Ln\, x)^2\, dx$

47) $\int \sqrt{x}\, sen \sqrt{x}\, dx$

48) $\int x \sqrt{5-3x}\, dx$

49) $\int \frac{e^{3x}}{1+e^x}\, dx$

50) $\int \frac{e^{2x}}{4+e^{4x}}\, dx$

51) $\int \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}}\, dx$

52) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{1+sen\, x}}\, dx$

53) $\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}\, dx$

54) $\int \frac{x}{25-9x^2}\, dx$

55) $\int \frac{1-2x}{x^2+12x+35}\, dx$

56) $\int \frac{7}{x^2-6x+18}\, dx$

57) $\int arctg\, 5x\, dx$

58) $\int sen^4 3x\, dx$

59) $\int \frac{e^{tg\, x}}{\cos^2 x}\, dx$

60) $\int \frac{x}{cosec\, 5x^2}\, dx$

61) $\int \frac{1}{\sqrt{7+5x^2}}\, dx$

62) $\int \frac{2x+3}{x^2+4}\, dx$

63) $\int cotg^6 x\, dx$

64) $\int cotg^5 x\, cosec\, x\, dx$

65) $\int x^3 \sqrt{x^2-25}\, dx$

66) $\int (sen\, x)\, 10^{\cos x}\, dx$

67) $\int (x^2 - sech^2\, 4x)\, dx$

68) $\int x \cosh x\, dx$

69) $\int x^2 e^{-4x}\, dx$

70) $\int x^5\sqrt{x^3+1}\,dx$ 71) $\int \frac{3}{\sqrt{11-10x-x^2}}\,dx$ 72) $\int \frac{12x^3+7x}{x^4}\,dx$

73) $\int tg\,7x\cos 7x\,dx$ 74) $\int e^{1+Ln\,5x}\,dx$ 75) $\int \frac{4x^2-12x-10}{(x-2)(x^2-4x+3)}\,dx$

76) $\int \frac{1}{x^4\sqrt{16-x^2}}\,dx$ 77) $\int (x^3+1)\cos x\,dx$ 78) $\int (x-3)^2(x+1)\,dx$

79) $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x^2}\,dx$ 80) $\int \frac{4x^3-15x^2-6x+81}{x^4-18x^2+81}\,dx$ 81) $\int (5-cotg\,3x)^2\,dx$

82) $\int x(x^2+5)^{3/4}\,dx$ 83) $\int \frac{1}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right)}\,dx$ 84) $\int \frac{x}{\cos^2 4x}\,dx$

85) $\int \frac{sen\,x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx$ 86) $\int \frac{4x^2-6x+4}{(x^2+4)(x-2)}\,dx$ 87) $\int \frac{x^2}{(25+x^2)^2}\,dx$

88) $\int sen^4x\cos^3x\,dx$ 89) $\int tg^3x\sec x\,dx$ 90) $\int \frac{x}{\sqrt{4+9x^2}}\,dx$

91) $\int \frac{2x^3+4x^2+10x+13}{x^4+9x^2+20}\,dx$ 92) $\int \frac{sen\,x}{(1+\cos x)^3}\,dx$ 93) $\int \frac{(x^2-2)^2}{x}\,dx$

94) $\int cotg^2x\,cosec\,x\,dx$ 95) $\int x^{3/2}\,Ln\,x\,dx$ 96) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx$

97) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{2x-3}}\,dx$ 98) $\int \frac{1-sen\,x}{cotg\,x}\,dx$ 99) $\int x^3e^{x^2}\,dx$

100) Demuestre que:

a) $\int (x+2)\,sen(x^2+4x-6)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2+4x-6) + C$ (Haga $u = x^2+4x-6$)

b) $\int \frac{cotg(Ln\,x)}{x}\,dx = Ln\,|sen(Ln\,x)| + C$ (Haga $u = Ln\,x$)

c) $\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}\,dx = arcsen\left(\frac{2x-1}{5}\right) + C$ (Complete el cuadrado del denominador y luego haga $u = x-\frac{1}{2}$)

d) $$\int 2^{-x}\,\mathrm{tgh}(2^{1-x})\,dx = -\frac{1}{2\mathrm{Ln}2}\mathrm{Ln}[\cosh(2^{1-x})] + C$$ (Haga $u = 2^{1-x}$)

e) $$\int \frac{x\,\mathrm{arcsen}\,x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{1}{4}(\mathrm{arcsen}\,x^2)^2 + C$$ (Haga $u = \mathrm{arcsen}\,x^2$)

f) $$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|x + \tfrac{1}{2} + \sqrt{(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}}\right| + C$$

g) Muestre que $$\int x^n\,\mathrm{Ln}\,x\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\mathrm{Ln}\,x - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C & \text{si } n \neq -1 \\[2ex] \dfrac{1}{2}(\mathrm{Ln}\,x)^2 + C & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

========== 0000000000 ==========

TABLA BÁSICA DE PRIMITIVAS

(a, b constantes ; C = constante de integración).

1) $\int a\,dx = ax + C$

2) $\int (a+bx)^n\,dx = \frac{1}{b}\frac{(a+bx)^{n+1}}{n+1} + C\ ;\quad n \neq -1$

3) $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\,\mathrm{Ln}\,(a+bx) + C$

4) $\int \mathrm{sen}\,(a+bx)\,dx = -\frac{1}{b}\cos\,(a+bx) + C$

5) $\int \mathrm{tg}\,ax\,dx = -\frac{1}{a}\,\mathrm{Ln}\,(\cos ax) + C$

6) $\int \cos\,(a+bx)\,dx = \frac{1}{b}\,\mathrm{sen}\,(a+bx) + C$

7) $\int \mathrm{cotg}\,ax\,dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{Ln}\,(\mathrm{sen}\,ax) + C$

8) $\int \sec^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{tg}\,ax + C$

9) $\int \mathrm{cosec}^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}\,\mathrm{cotg}\,ax + C$

10) $\int a^{bx}\,dx = \frac{a^{bx}}{b\,\mathrm{Ln}\,a} + C$

11) $\int e^{bx}\,dx = \frac{e^{bx}}{b} + C$

12) $\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\,\mathrm{arctg}\,\frac{bx}{a} + C$

13) $\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2\sqrt{(a+bx)^3}}{3b} + C$

14) $\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right) + C$

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{b}\,\mathrm{Ln}\left(bx + \sqrt{b^2x^2 \pm a^2}\right) + C$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = \frac{1}{b}\,\mathrm{arcsen}\,\frac{bx}{a} + C$

17) $\int \sqrt{b^2x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{b^2x^2 \pm a^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2b}\,\mathrm{Ln}\left(bx + \sqrt{b^2x^2 \pm a^2}\right) + C$

18) $\int \mathrm{senh}\,ax\,dx = \frac{1}{a}\cosh ax + C$

19) $\int \sqrt{a^2-b^2x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-b^2x^2}}{2} + \frac{a^2}{2b}\,\mathrm{arcsen}\,\frac{bx}{a} + C$

20) $\int \cosh ax\,dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{senh}\,ax + C$

21) $\int \mathrm{Ln}\,(a+bx)\,dx = \frac{1}{b}(a+bx)\,\mathrm{Ln}\,(a+bx) - x + C$

22) $\int \sec x\,\mathrm{tg}\,x\,dx = \sec x + C$

23) $\int \sec ax\,dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{Ln}\,(\sec ax + \mathrm{tg}\,ax) + C = \frac{1}{2a}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1+\mathrm{sen}\,ax}{1-\mathrm{sen}\,ax}\right) + C$

24) $\int \mathrm{cosec}\,x\,\mathrm{cotg}\,x\,dx = -\mathrm{cosec}\,x + C$

25) $\int \mathrm{cosec}\,ax\,dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{Ln}\,(\mathrm{cosec}\,ax - \mathrm{cotg}\,ax) + C = \frac{1}{2a}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1+\cos ax}{1-\cos ax}\right) + C$

26) $\int \mathrm{sen}\,x\cos x\,dx = \frac{\mathrm{sen}^2 x}{2} + C$

27) $\int \mathrm{sen}^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{sen}\,2ax}{4a} + C$

28) $\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,2ax}{4a} + C$

29) $\int \mathrm{sen}\,ax\cos bx\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(a-b)x}{a-b} + \frac{\cos(a+b)x}{a+b}\right] + C\ ;\ \text{con } a \neq b$

30) $\int \cos ax\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{sen}(a-b)x}{a-b} + \frac{\mathrm{sen}(a+b)x}{a+b}\right] + C$

31) $\int \mathrm{sen}\,ax\,\mathrm{sen}\,bx\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{sen}(a-b)x}{a-b} - \frac{\mathrm{sen}(a+b)x}{a+b}\right] + C$

AYUDA:

$\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;

$\operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$

$\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$; $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

$\operatorname{sen} x \pm \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x \pm y)\cdot\cos \tfrac{1}{2}(x \mp y)$; $\cos x + \cos y = 2\cos \tfrac{1}{2}(x + y)\cdot\cos \tfrac{1}{2}(x - y)$

$\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x + y)\cdot\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x - y)$; $\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \dfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]$

$\cos\alpha \cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$; $\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = -\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$

===== 00000 =====

3.-.-LA INTEGRAL DEFINIDA.-

Ejercicios Resueltos

Se definió

$$\text{(A)} \qquad \boxed{\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{\|P\|\to 0} \sum_P f(\xi_i)\,\Delta x_i}$$

donde P es una "partición" del intervalo [a, b] en n porciones arbitrarias de magnitud Δx_i ; $||P||$ es la "norma" de ellas, y ξ_i un "punto arbitrario" en cada uno de estos sub-intervalos; o bien

$$\text{(B)} \qquad \boxed{\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\left(\tfrac{b-a}{n}\right)\right)\left(\tfrac{b-a}{n}\right)}$$

Aquí se especifica que la partición es en **n** sub-intervalos iguales de magnitud $\frac{b-a}{n}$, y el punto intermedio es el extremo superior de cada sub-intervalo**.**

Ejemplos**:**

1) Aplicando la definición de una Integral Definida, calcular

a) $\displaystyle \lim_{\|P\|\to 0} \sum_P (1+3\xi_k)^{1/2}\,\Delta x_k$ en [1, 2]**.**

b) $\displaystyle \lim_{\|P\|\to 0} \sum_P 2\pi\xi_k (1+\xi_k)^3\,\Delta x_k$ en [0, 4]

c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

d) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$

Solución**:**

a) Según (A), $\displaystyle \lim_{\|P\|\to 0} \sum_P (1+3\xi_k)^{1/2}\,\Delta x_k \;=\; \int_1^2 (1+3x)^{1/2}\,dx \;=\; \frac{1}{3}\int_1^2 (1+3x)^{1/2}\,d(3x)$

$$= \frac{1}{3}\left[(1+3x)^{3/2}\,\frac{2}{3}\right]_1^2 = \frac{2}{9}\,(7^{3/2} - 8)_{//}$$

b) $$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{P} 2\pi\xi_k (1+\xi_k)^3\,\Delta x_k = 2\pi\int_0^4 x(1+x)^3\,dx = 2\pi\int_0^4 (x+3x^2+3x^3+x^4)\,dx$$

$$= 2\pi\left[\frac{x^2}{2}+x^3+\frac{3x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right]_0^4 = \frac{4688}{5}\,\pi_{//}$$

c) Según la forma (B), se debe hacer una adaptación**:**

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$ **.** Vemos que aquí $b - a = 1$, $\Rightarrow$ $a = 0, b = 1$**.**

Luego,

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(0+\frac{1}{n+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \mathrm{Ln}\,(1+x)\Big/_0^1 = \mathrm{Ln}\,2_{//}$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n} \Rightarrow$$ $a = 0$, $b = 1$**.** Así tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(0+\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}\right) = \int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,(1+x^2)\Big/_0^1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,2_{//}$$

2) Calcule, usando la modalidad (B), el valor de

$$\int_2^4 (x^2-3x)\,dx$$

Solución**:**

Ve mos que $b = 4$, $a = 2$, $\Rightarrow$ $b - a = 2$**.** Entonces

$$\int_2^4 (x^2-3x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(2+k\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(2+k\frac{2}{n}\right)^2 - 3\left(2+k\frac{2}{n}\right)\right]\cdot\frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[4+\frac{8}{n}k+\frac{4}{n^2}k^2-6-\frac{6}{n}k\right]\cdot\frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{8}{n^3}k^2 + \frac{4}{n^2}k - \frac{4}{n} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{8}{n^3}(k^2) \;+\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{n^2}(k) \;-\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\tfrac{4}{n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \;+\; \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \;-\; \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \;+\; \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2} \right) \;-\; \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}(n)$$

$$= \frac{4}{3} \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) \;+\; 2 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \;-\; 4$$

$$= \frac{4}{3} \cdot 2 \;+\; 2 \cdot 1 \;-\; 4 \;=\; -\frac{2}{3} \, /\!/$$

3) Expresar como una integral y calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots\dots + n^p}{n^{p+1}}, \quad p \neq -1$$

Solución**:**

Como $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k(\tfrac{b-a}{n})\right)(\tfrac{b-a}{n})$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{n^p} \cdot \frac{1}{n}, \qquad \Rightarrow \qquad b - a = 1\,;\; a = 0,\; b = 1\text{. Así}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 x^p\,dx = \left.\frac{x^{p+1}}{p+1}\right|_0^1 = \frac{1}{p+1} \, /\!/$$

4) Expresar como una integral y calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots\dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

Solución:

Tenemos $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{0+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$

$$= \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}_{//}$$

5) Resuelva la ecuación diferencial con valor inicial:

a) $\frac{dy}{dx} = 2 - 3x$; $y(0) = 4$

b) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x+5}$; $y(4) = 3$

c) $\frac{dv}{dt} = 10(10 - v)$; $v(0) = 0$

Solución:

a) $\frac{dy}{dx} = 2 - 3x \Rightarrow dy = (2-3x)\,dx$. Integrando ambos lados:

$$y(x) = \int (2-3x)\,dx$$

$$y(x) = 2x - \frac{3}{2}x^2 + C$$

$y(0) = 4 \Rightarrow y(0) = 2\cdot 0 - \frac{3}{2}0^2 + C = 4 \Rightarrow C = 4.$

Luego, la solución de la ecuación diferencial es $y(x) = 2x - \frac{3}{2}x^2 + 4_{//}$

b) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x+5} \Rightarrow dy = \sqrt{x+5}\,dx \Big/ \int$

$$y(x) = \int \sqrt{x+5}\,dx$$

$$y(x) = \frac{2}{3}(x+5)^{3/2} + C$$

$$y(4) = 3 \quad \Rightarrow \quad y(4) = \frac{2}{3}(4+5)^{3/2} + C = 3 \quad \Rightarrow \quad C = -15$$

Así la solución es $\quad y(x) = \frac{2}{3}(x+5)^{3/2} - 15_{//}$

c) $\dfrac{dv}{dt} = 10(10-v) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dv}{10-v} = 10\,dt \quad \Big/\int$

$$\int \frac{dv}{10-v} = 10\int dt$$

$$-\operatorname{Ln}(10-v) = 10t + C \quad \Big/ \cdot(-1)$$

$$\operatorname{Ln}(10-v) = -10t - C$$

$$10 - v = e^{-10t - C} = e^{-C}\cdot e^{-10t}$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = 10 - A\,e^{-10t} \quad , \quad \text{donde } A \equiv e^{-C}$$

y la condición inicial $v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(0) = 10 - A\cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 10.$

Así, la solución final es $\quad v(t) = 10(1 - e^{-10t})_{//}$

6) Calcular la derivada $g'(x)$ si

a) $\quad g(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{t^2+25}\,dt$

b) $\quad g(x) = \displaystyle\int_1^{\operatorname{sen} x} \sqrt{1-t^2}\,dt$

c) $\quad g(x) = \displaystyle\int_{3x}^{x^2} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

<u>Solución</u>**:**

Recordemos que, si $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$, esto es, $\int f(x)\,dx = F(x)$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \iff F'(x) = f(x)}$$

Así,

a) $g(x) = \int_0^x \sqrt{t^2+25}\,dt = F(x) - F(0)$. Derivando con respecto a x:

$g'(x) = F'(x) = f(x) = \sqrt{x^2+25}$ //

b) $g(x) = \int_1^{\operatorname{sen} x} \sqrt{1-t^2}\,dt = F(\operatorname{sen} x) - F(1)$ $\Big/ \frac{d}{dx}$

$g'(x) = \frac{d}{dx}\left[F(\operatorname{sen} x) - F(1)\right] = F'(\operatorname{sen} x)\cdot\cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}\cdot\cos x$ //

c) $g(x) = \int_{3x}^{x^2} \frac{1}{1+t^2}\,dt = F(x^2) - F(3x)$ $\Big/ \frac{d}{dx}$

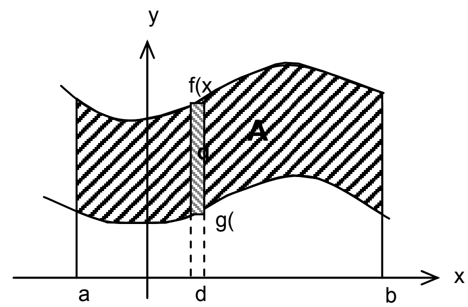
$g'(x) = \frac{d}{dx}\left[F(x^2) - F(3x)\right] = F'(x^2)\cdot 2x - F'(3x)\cdot 3$

$g'(x) = \frac{1}{1+x^4}\cdot 2x - \frac{1}{1+9x^2}\cdot 3$ //

========== 0000000000 ==========

4.-CÁLCULO DE ÁREAS PLANAS

Recordemos que, si la tira vertical **dA** es el "elemento fundamental de área" de ancho **dx** y altura **f(x) – g(x),** entonces el área achurada **A** entre x = a $\wedge$ x = b está dada por



$$\mathbf{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Ejercicios Resueltos

1) Calcular el área de la región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4x$.

Solución:

El área encerrada por ambas curvas está dada por la figura 1.

Resolviendo simultáneamente ambas ecuaciones $y = x^2$, $y = 4x$ hallamos las coordenadas de las intersecciones de ambas curvas: (0,0) y (4,16).

Entonces, el área elemental dA de la tira vertical será

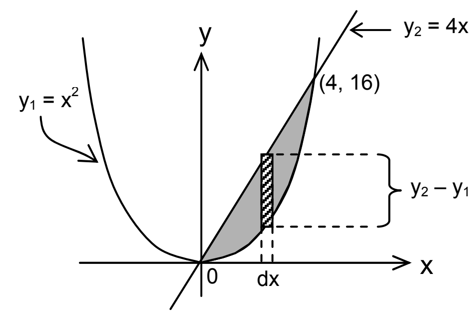


Fig. 1

$$dA = (\text{largo}) \cdot (\text{ancho})$$
$$= (y_2 - y_1) \cdot (dx)$$

y el área total buscada A de la zona sombreada será la suma (esto es, la integral) de todas las áreas elementales dA:

$$A = \int dA = \int_0^4 [y_2 - y_1]\,dx = \int_0^4 \left[4x - x^2\right] dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 = \frac{32}{3} \,//$$

2) Calcular el área encerrada por $x + y = 3$ $\wedge$ $x^2 + y = 3$.

Solución:

Resolviendo simultáneamente ambas ecuaciones, determinamos las intersecciones de ambas curvas (fig. 2). Luego, el área buscada A será

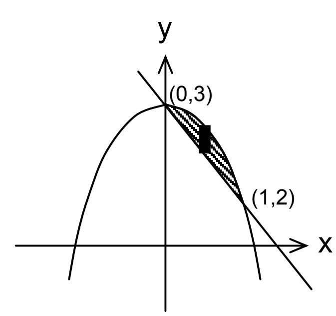


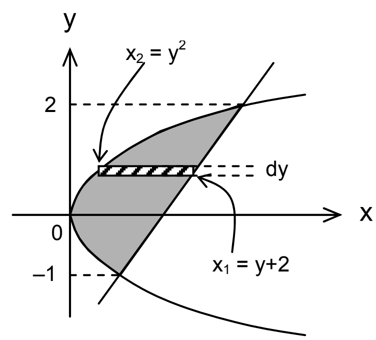
Fig. 2

$$A = \int_0^1 [y_2 - y_1]\,dx = \int_0^1 \left[(3-x^2)-(3-x)\right]dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\ //$$

3) Calcular el área entre $x = y^2 \ \wedge\ x - y - 2 = 0$.

Solución:



(i) En la figura adjunta se muestra el área a calcular.
Intersecciones: $y^2 = y + 2 \ \Rightarrow\ y = -1;\ y = 2$.
Notemos que aquí el área elemental dA es <u>horizontal</u>, pues su extremo izquierdo siempre permanece en la parábola $x = y^2$, y el derecho siempre en la recta $x = y + 2$.
Si la tira elemental fuera vertical, su extremo inferior estaría tanto en la parábola como en la recta, por lo que habría que separar en dos regiones.

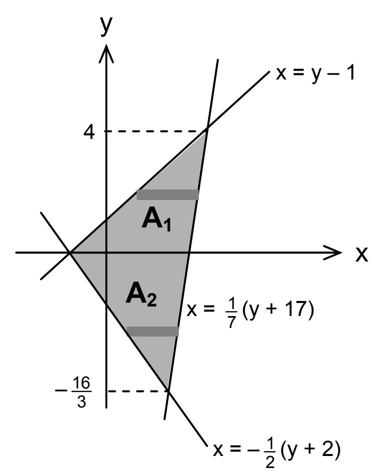
(ii) El área **A** de la región sombreada es entonces:

$$A = \int_{-1}^{2} [x_1 - x_2]\,dy = \int_{-1}^{2} \left[(y+2) - y^2\right]dy$$

$$= \left(\frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{3}y^3\right)_{-1}^{2} = \frac{5}{2}\ //$$

4) Determinar el área del triángulo cuyos lados son:
$x - y + 1 = 0$; $7x - y - 17 = 0$; $2x + y + 2 = 0$

Solución:



(i) El gráfico de la situación se muestra en la figura, al igual que las ecuaciones de las rectas respectivas.

(ii) De la figura, vemos que el área buscada **A** hay que separarla en dos: A_1 y A_2 (separadas por el eje X).

$$A_1 = \int_0^4 \left[\frac{1}{17}(y+17)-(y-1)\right]dy = \int_0^4 \left[-\frac{6}{7}y+\frac{24}{7}\right]dy = \left(-\frac{3}{7}y^2 + \frac{24}{7}y\right)_0^4 = \frac{48}{7}.$$

$$A_2 = \int_{-\frac{16}{3}}^0 \left[\frac{1}{7}(y+17)+\frac{1}{2}(y+2)\right]dy = \int_{-\frac{16}{3}}^0 \left[\frac{9}{14}y+\frac{24}{7}\right]dy = \frac{160}{21}.$$

Finalmente, el área sombreada buscada es $A = \frac{48}{7} + \frac{160}{21} = \frac{304}{21}$ //

5) Calcular el área acotada por la parábola cúbica $27y = 2x^3$, la tangente a ella en $x = 3$, y el eje X, en el primer cuadrante.

Solución:

(i) Intersecciones y gráfico:

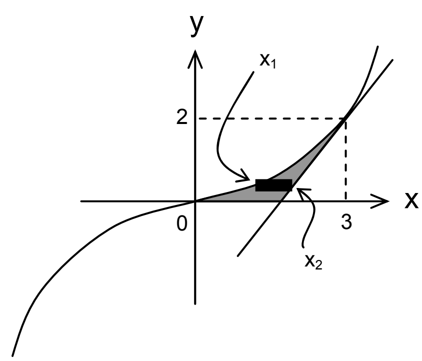
Para $x = 3$: $y = \frac{2}{27}x^3 \Rightarrow y = 2$.

Derivada en $x = 3$: $y' = \frac{2}{9}x^2 \Rightarrow y'(3) = 2$,

entonces la ecuación de la tangente en (3,2) es

$y = 2x - 4$.

En el gráfico se muestra en área sombreada a calcular **A**, y la tira de área elemental dA.



(ii) Hallemos esta área **A**:

$$dA = \text{largo}\cdot\text{ancho} = (x_2 - x_1)\cdot dy$$

$$= \left(\frac{1}{2}(y+4) - \sqrt[3]{\frac{27}{2}y}\right)dy$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \int dA = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}(y+4)-\sqrt[3]{\frac{27}{2}y}\right]dy$$

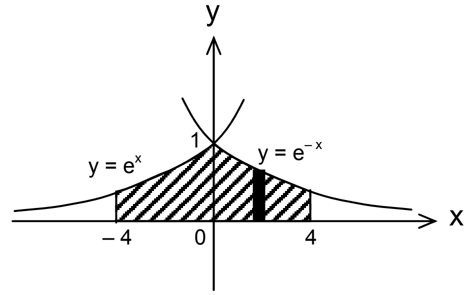
$$= \left(\frac{1}{4}y^2 + 2y - \frac{9}{4\sqrt[3]{2}}y^{4/3}\right)_0^2 = 1 + 4 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$$ //

6) Hallar el área encerrada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = \pm 4$.

<u>Solución</u>:

El elemento de área dA es

$$dA = \text{alto} \cdot \text{ancho} = y \cdot dx = e^{-x} \cdot dx$$



Por simetría, el área buscada **A** de la región achurada será el doble del área entre $x = 0 \wedge x = 4$.

Luego,

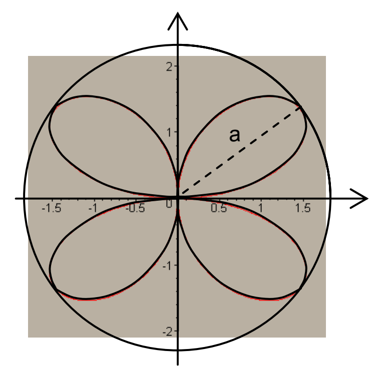
$$\mathbf{A} = 2 = 2(-e^{-x}) \Big/_{0}^{4} = 2(1 - e^{-4})_{//}$$

7) Calcular el área de la región interior a la circunferencia $\boldsymbol{\rho = a}$ y exterior a la rosa de 4 hojas $\boldsymbol{\rho = a \,\mathrm{sen}\, 2\theta}$.

<u>Solución</u>

Recordemos que el área A en coordenadas polares (ρ,θ) es

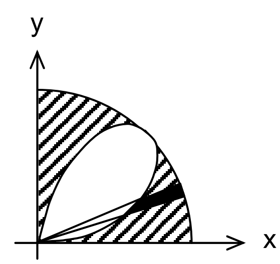
$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta)\, d\theta}$$



$\boldsymbol{\rho = a \,\mathrm{sen}\, 2\theta}$

De los gráficos es claro que, por simetría, el área total buscada **A** de la figura superior es equivalente a 4 veces el área achurada de la figura inferior.

El elemento de área triangular dA es la parte oscura del pequeño Δ:



$$dA = \frac{1}{2}(\rho^2_{\odot})d\theta - \frac{1}{2}(\rho^2_{\text{hoja}})d\theta$$

$$= \frac{1}{2}(a)^2 d\theta - \frac{1}{2}(a \,\mathrm{sen}\, 2\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}a^2(1 - \mathrm{sen}^2 2\theta)d\theta$$

Así, $$\mathbf{A} = 4\int dA = 4\left[\frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi/2}(1 - \mathrm{sen}^2 2\theta)\, d\theta\right] = 2a^2\left[\theta - \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\mathrm{sen}\, 4\theta}{8}\right)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= a^2\left[\theta + \frac{\mathrm{sen}\, 4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{2}_{//}$$

8) Calcular el área de la región interior a la cardioide $\boldsymbol{\rho = a\,(1 + \cos\theta)}$ y exterior a la circun–ferencia $\boldsymbol{\rho = 2a\cos\theta}$ **.**

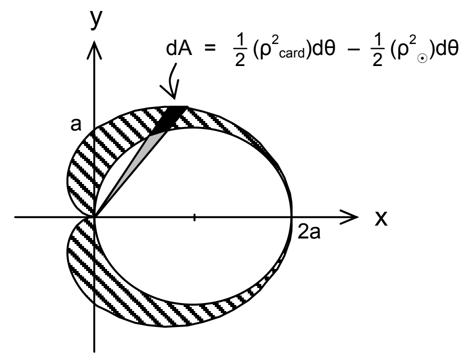
<u>Solución</u>**:**

En la figura adjunta está dibujada la cardioide (*del griego: forma de corazón)* y la circunferencia ⊙ **.**

La zona achurada es el área **A** que se pide calcular**.**

La pequeña zona negra es el elemento de área

$$dA = \frac{1}{2}(\rho^2_{card})d\theta \;-\; \frac{1}{2}(\rho^2_{\odot})d\theta\,.$$



Por simetría, el área achurada total A es igual al área achurada de la mitad superior, donde

$\frac{\pi}{2} \le \theta \le 0$ para ambas curvas, y $\pi \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

sólo para la cardioide (ver figura)**.**

Entonces

$$\mathbf{A} \;=\; \int dA \;=\; 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\rho^2_{card} - \rho^2_{\odot})\,d\theta \;\;+\;\; \int_{\pi/2}^{\pi}(\rho^2_{card})\,d\theta\right]$$

$$\mathbf{A} \;=\; \int_0^{\pi/2}\left(a^2(1+\cos\theta)^2 - 4a^2\cos^2\theta\right)d\theta \;\;+\;\; \int_{\pi/2}^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$\mathbf{A} \;=\; a^2\int_0^{\pi/2}\left(1+2\cos\theta-3\cos^2\theta\right)d\theta \;\;+\;\; a^2\int_{\pi/2}^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

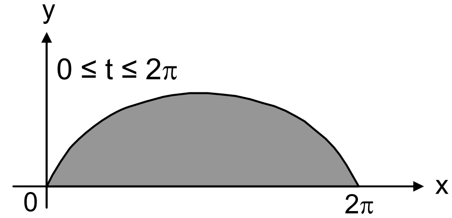
$$\mathbf{A} \;=\; a^2\left(\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta - 3\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{4}\right)\right)_0^{\pi/2} \;\;+\;\; a^2\left(\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{4}\right)_{\pi/2}^{\pi}$$

$$\mathbf{A} \;=\; a^2\left(2 + \frac{\pi}{4}\right) \;\;+\;\; a^2\left(\frac{3\pi}{4} - 2\right)$$

$$\mathbf{A} \;=\; \pi\, a^2{}_{//}$$

9) Dada la curva en forma paramétrica (llamada cicloide)

$$x(t) = a(t - \operatorname{sen} t)$$
$$y(t) = a(1 - \cos t) \;;$$



calcular el área de una arcada.

Solución:

Recordemos que, si una curva está dada en forma paramétrica

$$x = x(t) \;; \qquad y = y(t),$$

entonces un elemento de área dA está dada por

$$dA = y(t) \cdot x'(t)\, dt .$$

O sea

$$\boxed{A = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)\, dt}$$

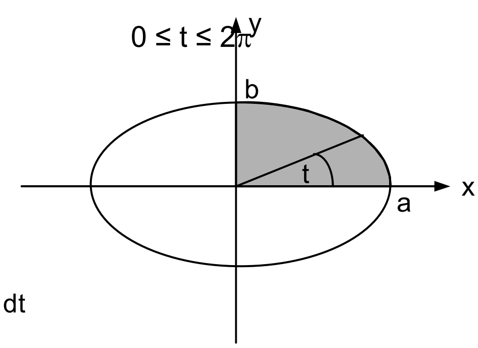
Entonces,

$$A = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t)\, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\, dt$$

$$A = a^2 \left(t - 2 \operatorname{sen} t + \frac{1}{2}(t + \operatorname{sen} t \cos t) \right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{2} \,_{//}$$

10) Calcular el área que encierra la elipse dada paramétricamente como

$$x = a \cos t$$
$$y = b \operatorname{sen} t \;, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$



Solución:

$$A = \int_0^{2\pi} (b \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t)\, dt$$

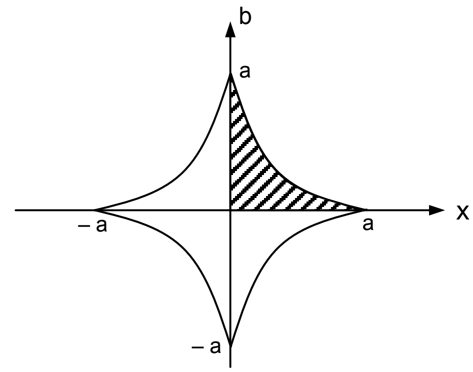
$$A = 4 \int_{\pi/2}^{0} (-ab) \operatorname{sen}^2 t\, dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\, dt$$

$$A = 4ab \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\, dt = 4ab \left[\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} = \pi\, a\, b_{//}$$

OBSERVACIÓN: Si $a = b = r$ (radio de la ⊙), entonces $A = \pi r^2$.

11) Calcular el área interior de la astroide

$$x = a\cos^3 t$$
$$y = a\,\text{sen}^3 t, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$



Solución**:**

De la figura, el área total buscada A será cuatro veces el área achurada**:**

$$A = 4\int_0^{\pi/2} (a\,\text{sen}^3 t)(3a\cos^2 t)(-\text{sen}\,t)\,dt$$

$$A = -12a^2\int_0^{\pi/2} \text{sen}^4 t\cdot\cos^2 t\,dt\,. \qquad \text{Pero:}\quad \text{sen}\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\;;\quad \cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\,,$$

$$\Rightarrow \qquad A = -12a^2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = -\frac{3}{2}a^2\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 2t+\cos^3 2t-\cos 2t)\,dt$$

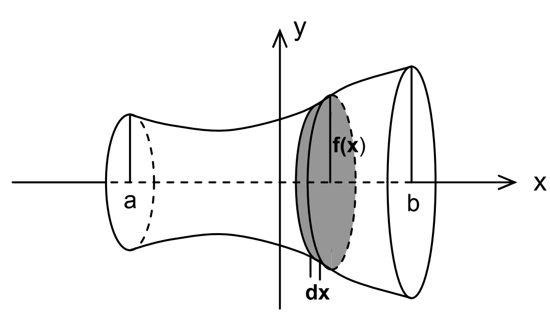
$$A = -\frac{3}{2}a^2\left[t-\frac{1}{4}(2t+\text{sen}\,2t\cos 2t + \frac{1}{2}(\text{sen}\,2t - \frac{\text{sen}^3 3t}{3} - \frac{1}{2}\text{sen}\,2t))\right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{8}a^2 \,/\!/$$

5.-CÁLCULO DE VOLÚMENES DE ROTACIÓN.

Ejercicios Resueltos

(A) Método de las secciones transversales.

Si **V** es el volumen entre $x = a \wedge x = b$ de un sólido de revolución en torno del eje OX, generado por una curva plana f(x), entonces



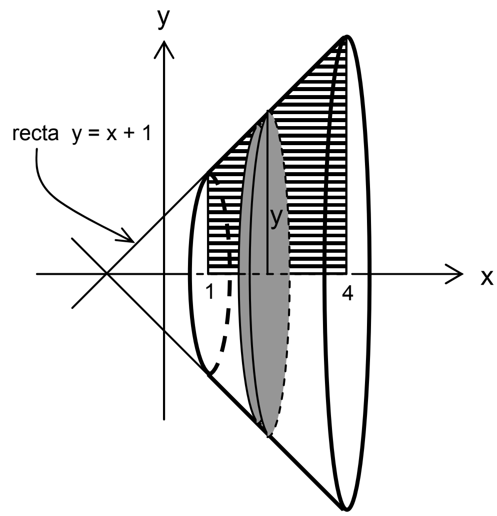
$$\boxed{\mathbf{V} = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

(ya que el elemento de volumen dV del disco sólido sombreado es

$$dV = \pi \cdot (\text{radio})^2 \cdot (\text{espesor}) = \pi \cdot f^2(x) \cdot dx\ ).$$

1) Calcular el volumen del tronco de cono generado por la rotación, en torno del eje OX, de la región encerrada por

$$y = x + 1 \quad ; \qquad x = 1\ ; \qquad x = 4\ ; \qquad y = 0\,.$$



Solución:

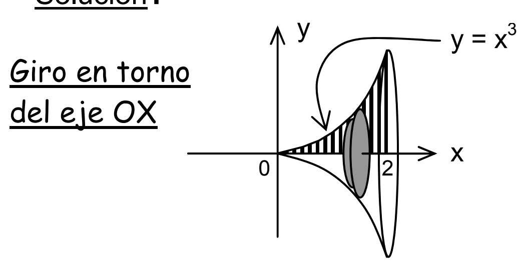
El gráfico muestra la región achurada, que gira en torno del eje OX generando el tronco de cono. El volumen así engendrado será

$$V = \pi \int_1^4 y^2 dx = \pi \int_1^4 (x+1)^2 dx$$

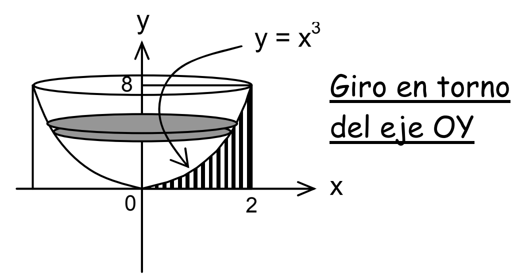
$$= \pi \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right)_1^4 = 39\,\pi_{//}$$

2) La región del plano encerrada por $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$ gira en torno de cada eje. Calcular el volumen generado en cada caso.

Solución:



V_1



V_2

Entonces,

$$V_1 = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 x^6 dx = \pi \left(\frac{x^7}{7} \right)_0^2 = \frac{128\pi}{7}_{//}$$

$V_2 =$  $-$  $= \pi \cdot r^2 \cdot h \ - \ \pi \int_0^8 x^2 dy$

$$V_2 = \pi \cdot 2^2 \cdot 8 \ - \ \pi \int_0^8 y^{2/3} dy \ = \ 32\pi \ - \ \pi \left(\frac{3}{5} y^{5/3} \right)_0^8 \ = \ \frac{64\pi}{5} \ //$$

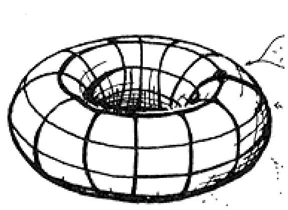
3) Calcular el volumen del toroide generado por la rotación del círculo

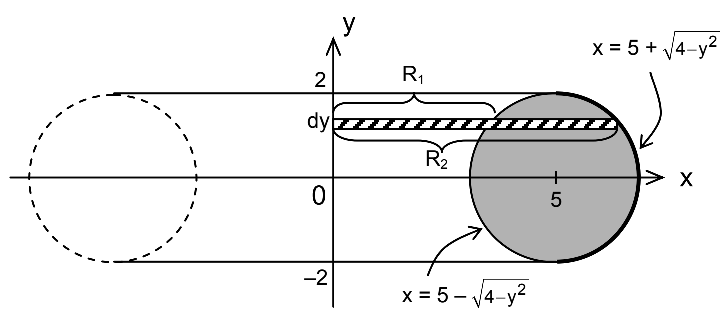
$$(x-5)^2 + y^2 \le 4$$

en torno del eje OY.

<u>Solución</u>:

i) Gráfico del toroide





$$R_2 = 5 + \sqrt{4-y^2} \quad , \quad R_1 = 5 - \sqrt{4-y^2}$$

ii) El volumen **V** del toroide es el volumen generado por el círculo sombreado al girar en torno del eje OY. Por consiguiente, será igual al volumen del "cilindro" sólido de radio R_2 <u>menos</u> el volumen del "cilindro" sólido de radio R_1 (pues el toroide está vacío en su centro).

Así,

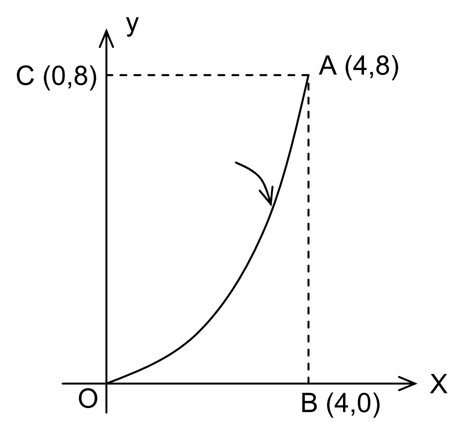
$$V_{toroide} = V(R_2) - V(R_1)$$
$$= \pi (R_2)^2 - \pi (R_1)^2$$

$$\Rightarrow \quad V = \pi \int_{-2}^{2} \left(5 + \sqrt{4-y^2} \right)^2 dy \ - \ \pi \int_{-2}^{2} \left(5 - \sqrt{4-y^2} \right)^2 dy$$

$$V \;=\; 2\pi\int_0^2\left(5+\sqrt{4-y^2}\right)^2 dy \;-\; 2\pi\int_0^2\left(5-\sqrt{4-y^2}\right)^2 dy$$

$$V \;=\; 2\pi\int_0^2 20\sqrt{4-y^2}\,dy \;=\; 40\pi\cdot\left[\frac{1}{2}\,y\sqrt{4-y^2}\;+4\,\text{arcsen}\left(\frac{y}{2}\right)\right]_0^2 \;=\; 20\pi\cdot 2\pi \;=\; 40\pi^2{}_{//}$$

4) Calcule el volumen por rotación de la región : $y=\frac{1}{2}x^2$



a) OAB en torno del eje OX

b) OAB en torno del eje OY

c) OAB en torno de AB

d) OAB en torno de CA

e) OAC en torno del eje OY

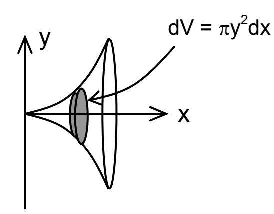
f) OAC en torno de CA

g) OAC en torno de AB

h) OAC en torno del eje OX

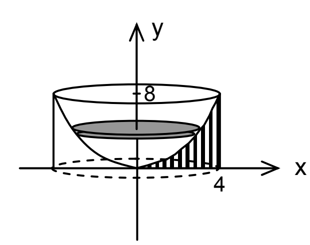
<u>Solución</u>**:**

a) $V \;=\; \int dV \;=\; \int_0^4 \pi y^2 dx$



$$V \;=\; \pi\int_0^4 x^3 dx \;=\; \pi\frac{x^4}{4} \;=\; 64\,\pi_{//}$$

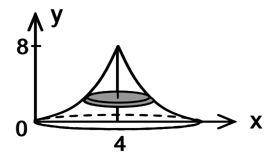
b) $V \;=\; V_{\text{cilindro sólido}} \;-\; V_{\text{paraboloide interior}}$



$$V \;=\; \pi\cdot 4^2\cdot 8 \;-\; \pi\int_0^8 x^2 dy$$

$$V \;=\; 128\pi \;-\; \pi\int_0^8 y^{4/3}dy \;=\; 128\pi \;-\pi\frac{3}{7}\cdot 8^{7/3} \;=\; \frac{512}{7}\,\pi_{//}$$

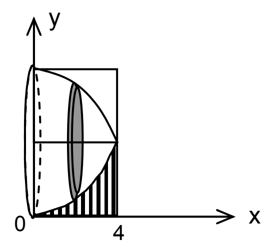
c) $V = \pi \int_0^8 (4-x)^2\,dy = \pi \int_0^8 (4-y^{2/3})^2\,dy$



$V = \pi \int_0^8 (16 - 8y^{2/3} + y^{4/3})\,dy$

$V = \pi \left[16y - \frac{24}{5}y^{5/3} + \frac{3}{7}y^{7/3}\right]_0^8 = \pi\left[128 - \frac{24}{5}\cdot 8^{5/3} + \frac{3}{7}\cdot 8^{7/3}\right] = \frac{1024}{35}\,\pi_{//}$

d) $V = V_{\text{cilindro sólido}} - V_{\text{paraboloide interior}}$

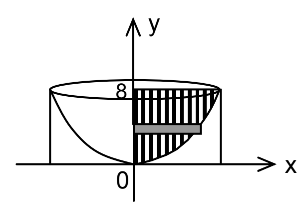


$V = \pi \cdot 8^2 \cdot 4 - \pi \int_0^4 (8-y)^2\,dx$

$V = 256\pi - \pi \int_0^4 (8 - x^{3/2})^2\,dx$

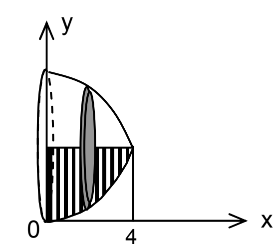
$V = 256\pi - \pi \int_0^4 (64 - 16x^{3/2} + x^3)\,dx = 156\pi - \left[64x - \frac{32}{5}x^{5/2} + \frac{1}{4}x^4\right]_0^4 = \frac{704}{5}\,\pi_{//}$

e) $V = \pi \int_0^8 x^2 dy = \pi \int_0^8 y^{4/3} dy$

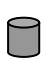


$V = \pi\left[\frac{3}{7}x^{7/3}\right]_0^8 = \frac{384}{7}\,\pi_{//}$

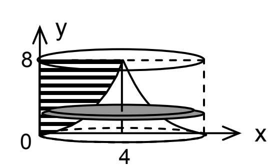
f) $V = \pi \int_0^4 (8-y)^2\,dx = \pi \int_0^4 (8 - x^{3/2})^2\,dx = \pi \int_0^4 (64 - 16x^{3/2} + x^3)\,dx$



$V = \pi\left[64x - \frac{32}{5}x^{5/2} + \frac{1}{4}x^4\right]_0^4 = \frac{576}{5}\,\pi_{//}$

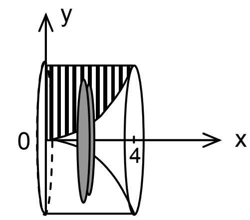
g) $V =$  $-$ 

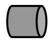
$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 - \pi \int_0^8 (4-x)^2\,dy = 128\pi - \pi \int_0^8 (4-y^{2/3})^2\,dy$



$V = 128\pi - \pi \int_0^8 (16 - 8y^{2/3} + y^{4/3})\,dy$

$$V = \pi\left[16y - \frac{24}{5}y^{5/3} + \frac{3}{7}y^{7/3}\right]_0^8 = \pi\left[128 - \frac{24}{5}\cdot 8^{5/3} + \frac{3}{7}\cdot 8^{7/3}\right] = \frac{3456}{35}\pi_{//}$$



h) V =  – 

$$V = \pi \cdot 8^2 \cdot 4 = \pi\int_0^4 x^3 dx = 256\pi - 64\pi$$

$$V = 192\pi_{//}$$

(B) **<u>Método de las capas cilíndricas</u>.**

(a) Si **dV** es un elemento de volumen del cilindro vertical, entonces

dV = (área tira blanca) · (altura cilindro)

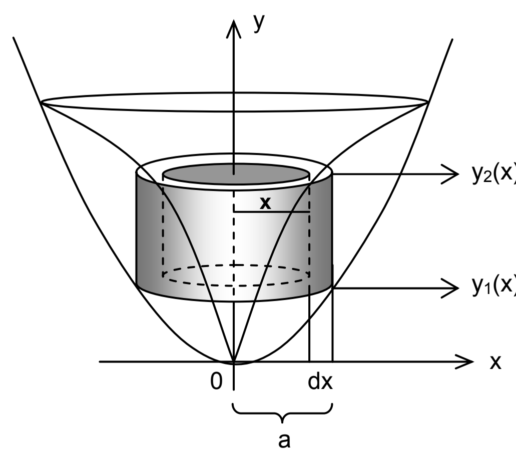
dV = (longitud · espesor) · (altura cilindro)

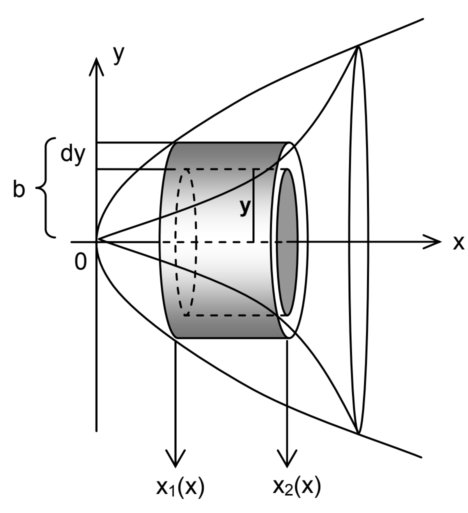
$dV = (2\pi\, x \cdot dx) \cdot (y_2 - y_1)$

$dV = 2\pi\,(y_2 - y_1) \cdot x \cdot dx$

Luego, el volumen total **V** del cilindro será

$$\mathbf{V} = 2\pi\int_0^a (y_2 - y_1)\,x\,dx$$





(b) Si **dV** es un elemento de volumen del cilindro horizontal, entonces

dV = (área tira blanca) · (largo cilindro)

dV = (longitud · espesor) · (largo cilindro)

$dV = (2\pi\, y \cdot dy) \cdot (x_2 - x_1)$

$dV = 2\pi\,(x_2 - x_1) \cdot y \cdot dy$

Luego, el volumen total **V** del cilindro será

$$\mathbf{V} = 2\pi \int_0^b (x_2 - x_1)\, y\, dy$$

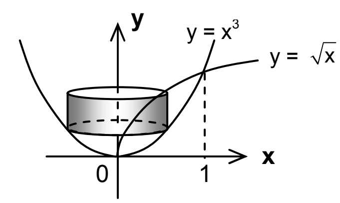
Ejemplos

1) La región acotada por las curvas $y = x^3$; $x = y^2$ gira en torno de los ejes OY y OX.

Hallar los volúmenes así generados en ambos casos.

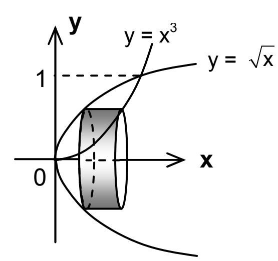
Solución:

a) *Girando sobre el eje OY*



$$V = 2\pi \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)\, x\, dx = 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{2}{5}\pi_{//}$$

b) *Girando sobre el eje OX*



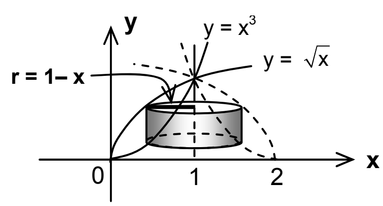
$$V = 2\pi \int_0^1 (y^{1/3} - y^2)\, y\, dy = 2\pi \int_0^1 (y^{4/3} - y^3)\, dy$$

$$V = 2\pi \left[\frac{3}{7} y^{7/3} - \frac{1}{4} y^4 \right]_0^1 = \frac{5}{14}\pi_{//}$$

2) La misma región gira sobre las rectas $x = 1$; $y = 1$. Hallar los volúmenes.

Solución:

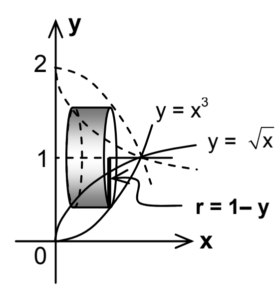
a) *Gira sobre $x = 1$.*



$$V = 2\pi \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)(1 - x)\, dx = 2\pi \int_0^1 (x^{1/2} - x^3 - x^{3/2} + x^4)\, dx$$

$$V = 2\pi \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{13}{30}\pi_{//}$$

b) *Gira sobre $y = 1$.*



$$V = 2\pi \int_0^1 (y^{1/3} - y^2)(1 - y)\, dy = 2\pi \int_0^1 (y^{1/3} - y^{4/3} - y^2 + y^3)\, dy$$

$$V = 2\pi \left[\frac{3}{4} y^{4/3} - \frac{3}{7} y^{7/3} - \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{4} y^4 \right]_0^1 = \frac{10}{21}\pi_{//}$$

Volúmenes en coordenadas paramétricas y polares

Recordemos que si una figura dada en coordenadas paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ gira en torno del eje OX, el volumen **V** generado está dado por

$$V = \pi \int_a^b y^2(t) \cdot x'(t)\,dt$$

y si gira en torno del eje OY, el volumen **V** generado está dado por

$$V = \pi \int_c^d x^2(t) \cdot y'(t)\,dt$$

Ejemplos

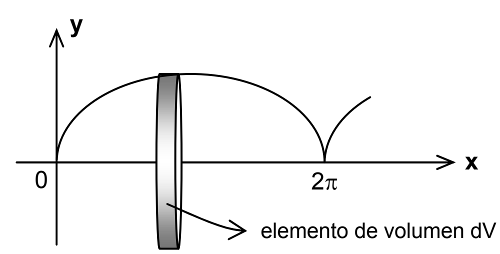
1) Hallar el volumen que genera un arco de la cicloide

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t - \operatorname{sen} t) \\ y(t) &= a(1 - \cos t) \ ; \quad 0 \le t \le 2\pi \end{aligned}$$

cuando éste gira en torno del eje OX.

Solución:

Una cicloide es una curva generada por un punto situado en el borde de un disco cuando éste rueda, sin resbalar.



Entonces el volumen V buscado es

$$V = \pi \int_a^b y^2(t) \cdot x'(t)\,dt$$

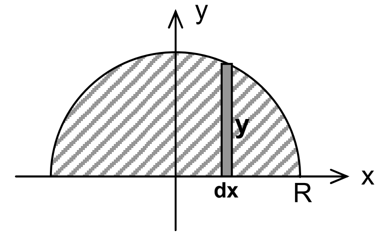
$$V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \cdot (1-\cos t)\,dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\,dt$$

$$V = \pi a^3 \left[t - 3\operatorname{sen} t + \frac{3}{2}(t + \operatorname{sen} t \cdot \cos t) - \operatorname{sen} t + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 t \right]_0^{2\pi}$$

$$V = 5\pi^2 a^3{}_{//}$$

2) Dada la esfera en forma paramétrica, calcular su volumen:

$$x = R\cos t$$
$$y = R\,\text{sen}\,t \ ; \qquad 0 \le t \le \pi$$



Solución:

$$V = \pi \int_a^b y^2(t)\cdot x'(t)\,dt$$

$$V = \pi \int_0^{\pi} (R^2\cos^2 t)(-R\,\text{sen}\,t)\,dt$$

dx = x' · dt

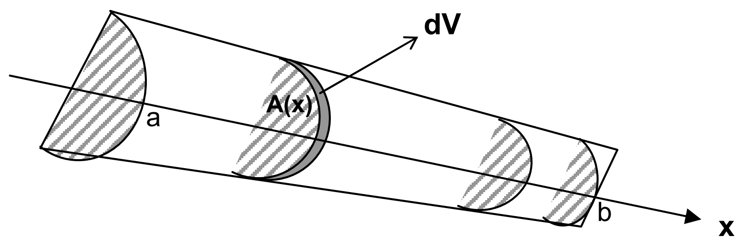
$$V = -\pi R^3 \int_0^{\pi} \text{sen}^3 t\,dt = -\pi R^3 \int_0^{\pi} \tfrac{1}{4}\left[3\,\text{sen}\,t - \text{sen}\,3t\right]dt = -\frac{1}{4}\pi R^3\left[-3\cos t + \frac{1}{3}\cos 3t\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{4}\pi R^3\,[3 - \frac{1}{3} + 3 - \frac{1}{3}] = -\frac{1}{4}\pi R^3\,[-\frac{16}{3}] = \frac{4}{3}\pi R^3{}_{//}$$

VOLUMEN DE CUERPOS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONOCIDA

Son cuerpos cuya sección transversal es una figura de magnitudes variables, pero siempre de la misma forma.

Por ejemplo:



Si dV es un elementop de volumen, entonces dV = (área achurada) · (espesor) = A(x) · dx, por lo que el volumen total V ser

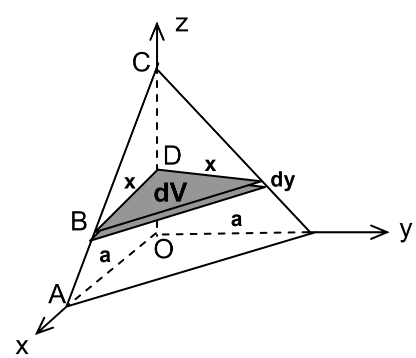
$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx} \quad ; \quad \text{ó} \quad \boxed{V = \int_c^d A(y)\,dy}$$

Calcular el volumen del sólido de forma piramidal, cuya base es un triángulo rectángulo isósceles de cateto ***a*** y de sección en forma de triangular semejante a la base, y de altura ***h***.

Solución:

En la figura, sea OC = **h** = altura de la pirámide

OD = y = distancia del elemento dV a la base de la pirámide



Entonces,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AO}{OC} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{h-y} = \frac{a}{h} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a(h-y)}{h}$$

El elemento de volumen dV es

$$dV = (\text{área } \Delta)\cdot(\text{espesor})$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot dy$$

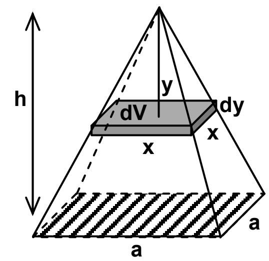
Así, el volumen total buscado V será

$$V = \int_a^b dV = \int_0^h \frac{1}{2}x^2\,dy = \frac{a^2}{2}\int_0^h \frac{(h-y)^2}{h^2}dy = \frac{a^2}{2h^2}\int_0^h (h^2 - 2hy + y^2)dy = \frac{a^2 h}{6}\ //$$

1) Calcular el volumen de una pirámide de base cuadrada de lado **a** y altura **h**.

Solución:

En la figura, sea dV un elemento de volumen, de lado basal **x** y altura **dy**. Entonces,



$$dV = x^2 \cdot dy \qquad (\ast)$$

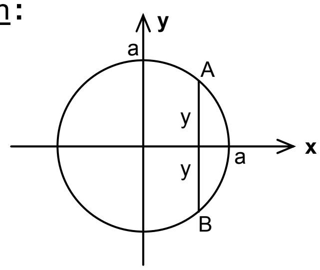
Por otro lado, por triángulos semejantes: $\frac{y}{x} = \frac{h}{a}$.

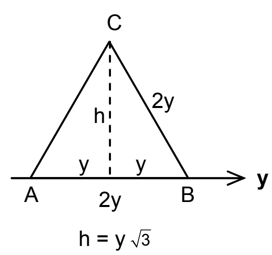
Luego, $x = \frac{a\,y}{h}$. Reemplazando en $(\ast)$,

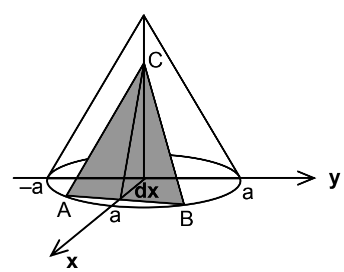
$$dV = \frac{a^2}{h^2}y^2 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{a^2}{h^2}\int_0^h y^2 dy = \frac{a^2}{h^2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}a^2h_{//}$$

2) Calcular el volumen del sólido, de base el círculo $x^2 + y^2 = a^2$, en que la sección generada por planos perpendiculares a la base y al eje OX es un triángulo equilátero cuyo lado es la cuerda en el círculo.

Solución:







De $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow$ AB = base del triángulo = $2y = 2\sqrt{a^2 - x^2}$; altura h del triángulo = $y\sqrt{3}$.

Un elemento de volumen **dV** será, de la tercera figura,

$$dV = (\text{área } \Delta \text{ ABC}) \cdot dx$$
$$= \frac{1}{2}(\text{base}) \cdot (\text{altura}) \cdot dx = \frac{1}{2}(2\sqrt{a^2 - x^2}) \cdot (y\sqrt{3}) \cdot dx$$

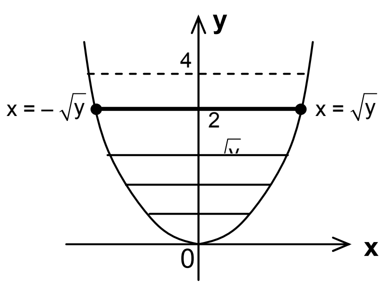
$$\Rightarrow \qquad V = \sqrt{3}\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)dx = 2\sqrt{3}\int_0^a (a^2 - x^2)dx$$

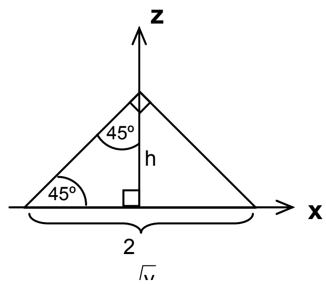
$$V = 2\sqrt{3}\left[a^2x - \frac{x^3}{3})\right]_0^a = \frac{4\sqrt{3}}{3}a^3{}_{//}$$

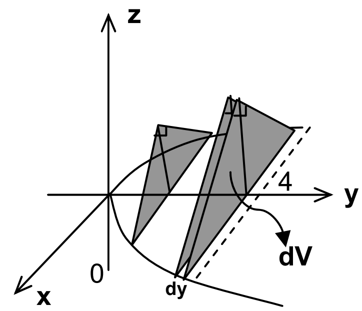
3) La base de un sólido es la región acotada por $y = x^2$, $y = 4$; las secciones transversales son trángulos rectángulos isósceles cuya hipotenusa está en el plano XY, y su plano es $\perp$ al plano XY **.**

Hallar el volumen del sólido así formado **.**

<u>Solución</u> **:**







Es claro, de la 2ª fig **. ,** que $h = \sqrt{y}$ **.**

Si **dV** es un elemento de volumen, si **dy** es el espesor de este elemento (ver 3ª figura), entonces

$$dV \;=\; (\text{área triángulo}) \cdot (\text{espesor})$$

$$= \left(\frac{1}{2}\,\text{base} \cdot \text{altura}\right) \cdot (dy) \;=\; \frac{1}{2}(2\sqrt{y} \cdot \sqrt{y}) \cdot dy \;=\; y\,dy$$

Luego, el volumen buscado **V** será

$$V \;=\; \int_0^4 y\,dy \;=\; 8_{//}$$

4) La misma base del problema anterior, ahora las secciones transversales son semicírculos en vez de triángulos rectángulos isósceles **.** Hallar el volumen **.**

<u>Solución</u> **:**

Ahora el elemento de volumen **dV** es

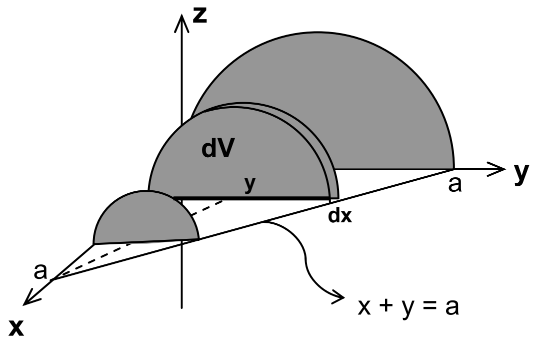
$$dV \;=\; (\text{área semicírculo}) \cdot (\text{espesor})$$

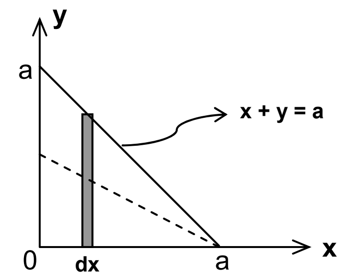
$$= (\pi\, y) \cdot dy$$

$$\Rightarrow \qquad V \;=\; \pi \int_0^4 y\,dy \;=\; 8\,\pi_{//}$$

5) La base de un sólido es un triángulo rectángulo isósceles de lado **a**. La sección del sólido es un semicírculo cuyo plano que lo contiene es $\perp$ a uno de los lados de este triángulo y a la base. Hallar el volumen del sólido.

<u>Solución</u>:





De las figuras, vemos que un elemento de volumen **dV** del sólido está dado por

$$dV = (\text{área semicírculo})\cdot(\text{espesor})$$

$$= \left(\pi\cdot\left[\frac{y}{2}\right]^2\right)\cdot dx$$

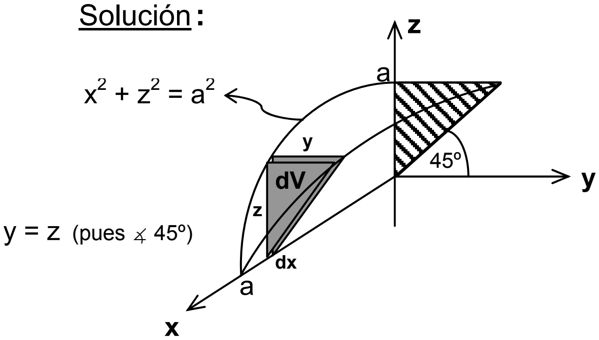
$$= \frac{1}{4}\pi\, y^2\, dx = \frac{1}{4}\pi\,(a-x)^2\, dx$$

$$\Rightarrow \qquad V = \frac{1}{4}\pi\int_0^a (a-x)^2\, dx = \frac{1}{4}\pi\left[a^2x - ax^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^a$$

$$V = \frac{1}{12}\pi\, a^3{}_{//}$$

6) De un tronco, en forma de cilindro recto circular de radio **a**, se corta una cuña mediante un corte vertical y otro oblicuo en 45º, de modo que la intersección de ellos se produce en el centro generando un diámetro. Hallar al volumen de la cuña.

<u>Solución</u>:



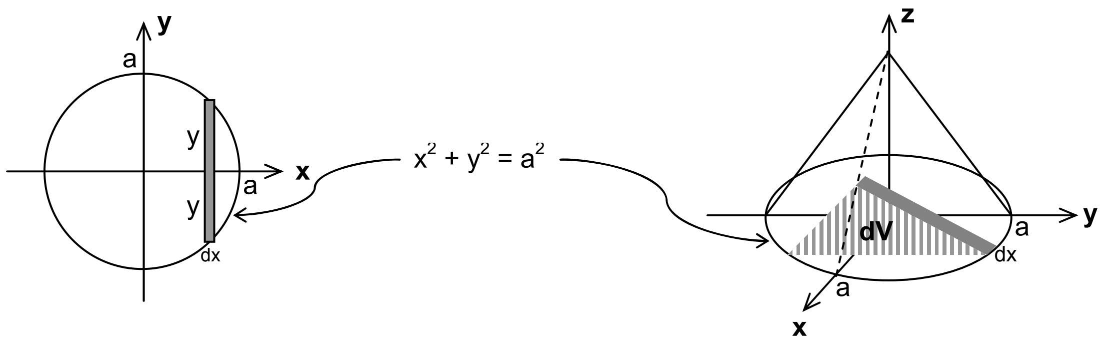
De la fig., vemos que el elemento de volumen dV es $dV = (\text{área }\Delta)\cdot(\text{espesor}) = (\frac{1}{2}yz)\cdot dx$

$$dV = (\tfrac{1}{2}z^2)\cdot dx = \tfrac{1}{2}(a^2 - x^2)\cdot dx$$

$$\text{Luego,}\quad V = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx\right) = \left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{3}a^3{}_{//}$$

7) La base del sólido de la figura es el círculo $x^2 + y^2 = a^2$. Calcular su volumen cuando las secciones transversales son triángulos isósceles con base en el plano XY, de altura igual a la base.

Solución:



Vemos que un elemento de volumen dV está dado por $dV = \frac{1}{2}$ base · altura · espesor.

Entonces del enunciado, base = altura Δ = 2y. Así

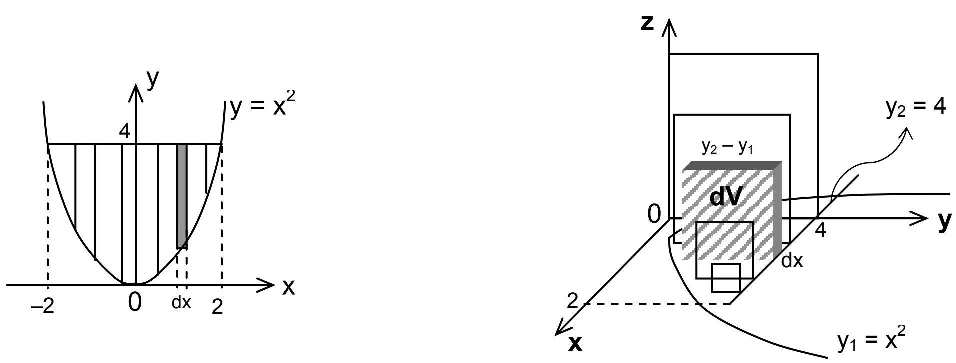
$$dV = \frac{1}{2}(2y)\cdot(2y)\cdot dx = 2\,y^2\,dx = 2\,(a^2 - x^2)\,dx$$

$$\Rightarrow \qquad V = \int_{-a}^{a} 2(a^2 - x^2)\,dx = 2\int_0^a 2(a^2 - x^2)\,dx$$

$$\Rightarrow \qquad V = \frac{8}{3}a^3{}_{//}$$

8) La base de un sólido es la región del plano XY acotada por $y = 4$, $y = x^2$. Calcule el volumen del sólido si las secciones transversales $\perp$ al eje OX son cuadrados.

Solución:



El elemento de volumen dV es

$$dV \;=\; (\text{área cuadrado})\cdot(\text{espesor}) \;=\; (y_2 - y_1)^2\cdot dx \;=\; (4 - x^2)^2\cdot dx$$

Entonces, el volumen V buscado será

$$V = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)^2\, dx$$

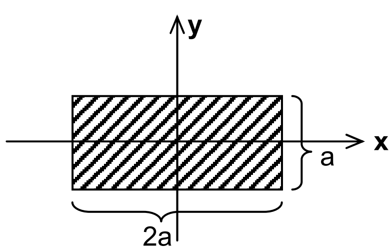
$$V = 2\int_{0}^{2} (4 - x^2)^2\, dx$$

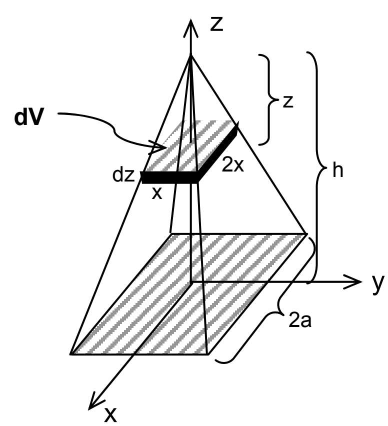
$$V = 2\int_{0}^{2} (16 - 8x^2 + x^4)\, dx$$

$$V = 2\left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_0^2 \;=\; 34\,\frac{2}{15}\,//$$

9) Calcular el volumen de un prisma de base rectangular, de lados **a** y **2a**, y altura **h.**

Solución**:**





De la 2ª figura, un elemento de volumen **dV** está dado por

$$\begin{aligned} dV &= (\text{área rectángulo elemental})\cdot(\text{espesor}) \\ &= (2x\cdot x)\cdot(dx) = 2\,x^2\,dx \end{aligned}$$

Hallemos ahora una relación entre la altura ***h*** de la pirámide y un lado ***a*** de ella**.** Por semejanza de triángulos:

$$\frac{z}{2x} = \frac{h}{2a} \quad\Rightarrow\quad x = \frac{a\,z}{h}\,.$$

Luego, $dV = 2\,\dfrac{a^2 z^2}{h^2}\,dx \;\Rightarrow\; V = \dfrac{2a^2}{h^2}\displaystyle\int_0^h z^2\,dz = \dfrac{2a^2}{h^2}\left[\dfrac{z^3}{3}\right]_0^h \;\Rightarrow\; V = \dfrac{2}{3}a^2h$ //

6.-LONGITUD DE UNA CURVA

Ejercicios Resueltos

Recordemos:

a) Si una curva C está dada en coordenadas rectangulares y = y(x), entonces su longitud L_C, entre x = a, x = b , está dada por

$$\boxed{L_C = \int_a^b \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx} \qquad a \le x \le b \qquad (1)$$

b) Si una curva C está dada en coordenadas paramétricas

$$x = x(t),$$
$$y = y(t)$$

entonces su longitud L_C, entre t_0 y t_1 , está dada por

$$\boxed{L_C = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt} \qquad t_0 \le t \le t_1 \qquad (2)$$

c) Si una curva C está dada en coordenadas polares ρ = ρ(θ), entonces su longitud L_C, entre θ = α, θ = β , está dada por

$$\boxed{L_C = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\boldsymbol{\rho}']^2+\boldsymbol{\rho}^2}\,d\boldsymbol{\theta}} \qquad \alpha \le \theta \le \beta \qquad (3)$$

1) Calcular la longitud de un arco de la curva $8x^2 = 27y^3$ si $1 \le x \le 8$.

Solución:

Podemos usar la fórmula (1). Para esto, hallemos primero $[y'(x)]^2$. De $8x^2 = 27y^3$ tenemos $y = \frac{2}{3}x^{2/3}$. Luego, $y' = \frac{4}{9}x^{-1/3}$, $[y']^2 = \frac{16}{81}x^{-2/3}$. Reemplazando en (1),

$$L_C = \int_1^8 \sqrt{1+\frac{16}{81}x^{-2/3}}\,dx = \int_1^8 \sqrt{\frac{x^{2/3}+\frac{16}{81}}{x^{2/3}}}\,dx = \int_1^8 \sqrt{x^{2/3}+\frac{16}{81}}\,\frac{dx}{x^{1/3}}$$

Haciendo el cambio de variable $u^2 = x^{2/3}+\frac{16}{81}$, se tiene $2udu = \frac{2}{3}x^{-1/3}dx \Rightarrow 3udu = \frac{dx}{x^{1/3}}$.

$$\therefore \qquad \int \sqrt{x^{2/3} + \tfrac{16}{81}}\, \frac{dx}{x^{1/3}} \;=\; 3\int u^2 du \;=\; u^3 \;=\; \left[x^{2/3} + \frac{16}{81}\right]^{3/2}$$

$$\Rightarrow \qquad L_C \;=\; \left[x^{2/3} + \frac{16}{81}\right]^{3/2}\Bigg|_1^8 \;=\; \frac{1}{729}\left[8\cdot(85)^{3/2} - (97)^{3/2}\right]_{//}$$

2) Calcular la longitud de un arco de

$$y \;=\; \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x} \quad , \qquad 1 \le x \le 2$$

<u>Solución</u>:

Usando la relación (1) $\qquad L_C = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\,dx$, tenemos

$$L_C = \int_1^2 \sqrt{1+\left[\frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2}\right]^2}\,dx \;=\; \int_1^2 \sqrt{1+\frac{x^4}{16} - \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4}}\,dx \;=\; \int_1^2 \sqrt{\left[\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right]^2}\,dx \;=\; \left[\frac{x^3}{12} - \frac{1}{x}\right]_1^2 \;=\; \frac{13}{12}_{//}$$

3) Hallar la longitud de la cardioide

$$\rho = a(1+\cos\theta) \quad , \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

<u>Solución</u>:

Para usar la relación (3) $\qquad L_C = \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{[\boldsymbol{\rho}']^2 + \boldsymbol{\rho}^2}\,d\boldsymbol{\theta}$, hallemos primero $\sqrt{[\boldsymbol{\rho}']^2 + \boldsymbol{\rho}^2}$:

$$\sqrt{[\boldsymbol{\rho}']^2 + \boldsymbol{\rho}^2} \;=\; \sqrt{[-a\,\text{sen}\theta]^2 + [a(1+\cos\theta)]^2} \;=\; \sqrt{a^2\text{sen}^2\theta + a^2 + 2a^2\cos\theta + a^2\cos^2\theta}$$

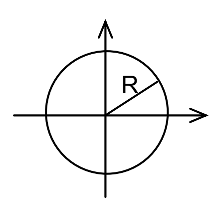
$$= \sqrt{2a^2 + 2a^2\cos\theta} \;=\; a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta} \;=\; a\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\right) \;=\; 2a\cos\tfrac{\theta}{2}\,.$$

Entonces,

$$L_C \;=\; \int_\alpha^\beta \sqrt{[\boldsymbol{\rho}']^2 + \boldsymbol{\rho}^2}\,d\boldsymbol{\theta} \;=\; 2a\int_0^{2\pi} \cos\tfrac{\theta}{2}\,d\boldsymbol{\theta} \;=\; 8a\int_0^{\pi} \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\frac{d\theta}{2} \;=\; 8a\cdot\left[\text{sen}\,\tfrac{\theta}{2}\right]_0^\pi \;=\; 8a_{//}$$

4) Calcular, mediante integración, el perímetro de una circunferencia de radio R.

<u>Solución</u>:



La ecuación de la $\odot$ de la figura es $\rho = R$. Entonces, $\rho' = 0$.

Usando la relación (3), se tiene

$$L_C = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\boldsymbol{\rho}']^2 + \boldsymbol{\rho}^2}\, d\boldsymbol{\theta} = \int_0^{2\pi} \sqrt{[0]^2 + R^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} R\, d\theta = R \cdot (2\pi) = 2\pi R_{//}$$

5) La posición de un punto móvil P(x,y) en cualquier instante **t** está dada por

$$x = \tfrac{1}{2}t^2$$

$$y = \tfrac{1}{9}(6x+9)^{3/2} \ , \quad t \geq 0 .$$

Calcular el espacio recorrido por el punto desde $t = 0$ hasta $t = 4$.

<u>Solución</u>:

Sea L el espacio recorrido. Entonces, $x' = t$; $y' = \frac{1}{9}[\frac{3}{2} \cdot (6x+9)^{1/2} \cdot 6] = (6x+9)^{1/2}$.

Así, usando la relación (2) para coordenadas paramétricas,

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

tenemos: $L = \int_0^4 \sqrt{[t]^2 + \left[(6t+9)^{1/2}\right]^2}\, dt = \int_0^4 \sqrt{t^2 + 6t + 9}\, dt = \int_0^4 \sqrt{(t+3)^2}\, dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + 3t\right]_0^4 = 20_{//}$

6) Calcular la longitud de un arco de la cicloide, cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = a(t - \operatorname{sen} t)$$

$$y = a(1 - \cos t) \ , \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

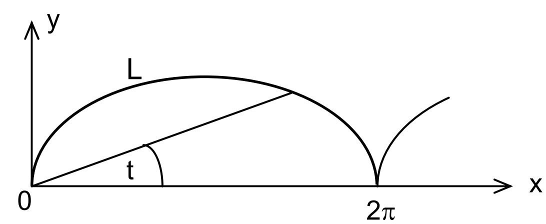
<u>Solución</u>:

Hallemos primero , y'.

$$x' = a(1 - \cos t)$$

$$y' = a \operatorname{sen} t .$$

Entonces, usando la relación (2)



$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$, se tiene

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{[a(1-\cos t]^2 + [a \operatorname{sen} t]^2}\, dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\, dt = 2a\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos t}\, dt$$

$$= 4a\sqrt{2} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\frac{t}{2}\, dt = -8a \left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\pi} = 8a_{//}$$

<u>7.- ÁREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN</u>

Ejercicios Resueltos

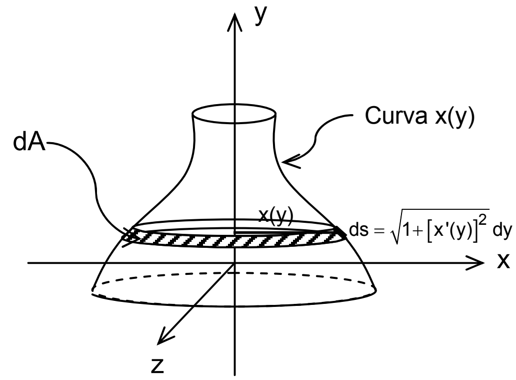
Si A(s) es el área generada por una curva x = x(y) que gira en torno del eje Y, entonces un elemento de área dA es

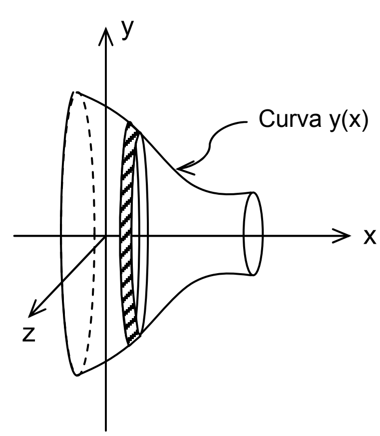
dA = (longitud de la tira achurada) $\cdot$ (ancho tira)

$$dA = (2\pi \cdot x(y)) \cdot (ds) = (2\pi x(y)) \cdot \left(\sqrt{1+[x'(y)]^2}\, dy \right)$$

Luego,

$$\boxed{A(s) = 2\pi \int_a^b x(y) \cdot \sqrt{1+[x'(y)]^2}\, dy}$$





Si la curva gira en torno del eje X, tenemos

$$\boxed{A(s) = 2\pi \int_a^b y(x) \cdot \sqrt{1+[y'(x)]^2}\, dx}$$

1) Hallar el área **A** de la superficie generada por la rotación de la curva

$$y = x^3, \quad 1 \le x \le 3,$$

en torno del eje OX.

<u>Solución</u>:

$$A = 2\pi \int_a^b y(x)\cdot\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx = 2\pi\int_1^3 x^3\cdot\sqrt{1+\left[3x^2\right]^2}\,dx$$

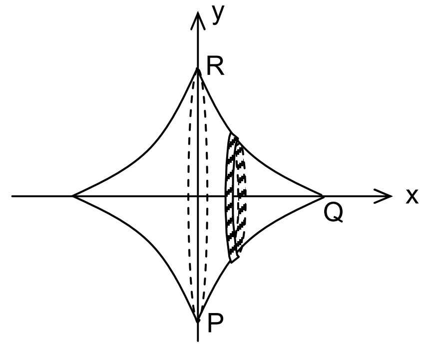
$$= 2\pi\int_1^3 \sqrt{1+9x^4}\;x^3\,dx = \frac{2\pi}{36}\int_1^3 \sqrt{1+9x^4}\;(36x^3\,dx)$$

$$= \frac{\pi}{18}\left[\left(1+9x^4\right)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\right]_1^3 = \frac{\pi}{27}\left(730^{3/2}-10^{3/2}\right)_{//}$$

2) Calcular el área de la superficie del cuerpo generado por la rotación de la astroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

en torno del eje X.



Solución:

El área total buscada A(s) será el doble del área de la zona PQR de la figura. Así,

$$A(s) = 2\;2\pi\left(\int_a^b y(x)\cdot\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx\right)$$

Hallemos primero $1 + (y')^2$:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \quad\Rightarrow\quad y(x) = \left(1-x^{2/3}\right)^{3/2} \quad\Rightarrow\quad y'(x) = \frac{3}{2}\left(1-x^{2/3}\right)^{1/2}\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \left(1-x^{2/3}\right)\left(x^{-2/3}\right) = \frac{x^{2/3}+1-x^{2/3}}{x^{2/3}} = \frac{1}{x^{2/3}} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{1+[y'(x)]^2} = \frac{1}{x^{1/3}}\,.$$

Luego, $\quad A(s) = 4\pi\int_0^1 y(x)\cdot\frac{1}{x^{1/3}}\,dx = 4\pi\int_0^1\left(1-x^{2/3}\right)^{3/2}x^{-1/3}dx\,;$

Haciendo cambio de variable: $u^2 = \left(1-x^{2/3}\right) \Rightarrow 2u\,du = -\frac{2}{3}x^{-1/3}dx \Rightarrow x^{-1/3}dx = -3u\,du,$

se tiene, (en que $x = 0 \Rightarrow u = 1;\; x = 1 \Rightarrow u = 0$)

$$A(s) = 4\pi\int_0^1\left(1-x^{2/3}\right)^{3/2}x^{-1/3}dx = 4\pi\int_1^0 u^3(-3u\,du) = -12\pi\int_1^0 u^4\,du$$

$$A(s) = -12\pi\left[\frac{1}{5}u^5\right]_1^0 = \frac{12}{5}\pi_{//}$$

3)

Calcular el área de la astroide, dada en coordenadas paramétricas

$$x(t) = \cos^3 t$$

$$y(t) = \operatorname{sen}^3 t\,, \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

cuando gira en torno del eje OY.

Solución:

Como gira en torno del eje OY, usamos

$$A(s) = 2\pi \int_a^b x(y) \cdot \sqrt{1 + [x'(y)]^2}\, dy$$

$$\Rightarrow \qquad A(s) = 2\left(2\pi \int_0^{\pi/2} x(t) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt\right) \quad ;$$

Pero, $x'(t) = -3\cos^2 t \cdot \operatorname{sen} t$; $y'(t) = 3\operatorname{sen}^2 t \cdot \cos t$. Luego,

$$A(s) = 4\pi \int_0^{\pi/2} \cos^3 t \cdot \sqrt{\left[-3\cos^2 t \cdot \operatorname{sen} t\right]^2 + \left[3\operatorname{sen}^2 t \cdot \cos t\right]^2}\, dt$$

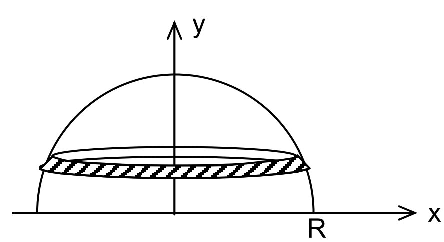
$$A(s) = 12\pi \int_0^{\pi/2} \cos^3 t \cdot \sqrt{\cos^4 t \cdot \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen}^4 t \cdot \cos^2 t}\, dt$$

$$A(s) = 12\pi \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \cdot \operatorname{sen} t\, dt = -12\pi \left[\frac{1}{5}\cos^5 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{12}{5}\pi \,//$$

4) Calcular el área de una esfera de radio R.

Solución:

En coordenadas paramétricas, una ecuación de la esfera es



$$x(t) = R\cos t$$

$$y(t) = R\operatorname{sen} t$$

Entonces

$$A(s) = 2\left(2\pi\int_0^{\pi/2} x(t)\cdot\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt\right)$$

$$A(s) = 4\pi\int_0^{\pi/2} R\cos t\cdot\sqrt{[-R\operatorname{sen} t]^2+[R\cos t]^2}\,dt$$

$$A(s) = 4\pi\int_0^{\pi/2} R\cos t\cdot\sqrt{R^2\left[\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t\right]}\,dt$$

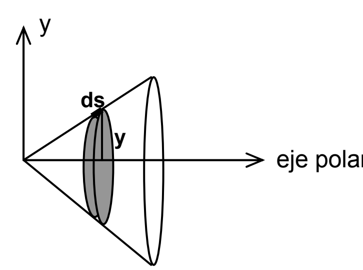
$$A(s) = 4\pi R^2\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt$$

$$A(s) = 4\pi R^2[\operatorname{sen} t]_0^{\pi/2} = 4\pi R^2{}_{//}$$

ÁREA DE LA SUPERFICIE EN PÒLARES ρ = ρ(θ)

a) En torno del eje polar**:**

$$\boxed{A(s) = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\theta)\cdot\operatorname{sen}(\theta)\sqrt{(\rho')^2+(\rho)^2}\,d\theta}$$



b) En torno de la vertical**:**

De manera similar, cuando gira en torno del eje vertical, el área A(s) está dada por

$$\boxed{A(s) = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\theta)\cdot\cos(\theta)\sqrt{(\rho')^2+(\rho)^2}\,d\theta}$$

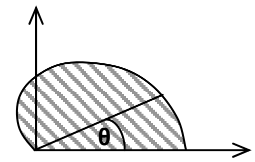
Ejemplos**:**

1) Calcular el área de la superficie que se obtiene por rotación en torno del eje polar de la cardiode

$$\rho(\theta) = 2(1 + \cos\theta)$$

Solución**:**

Usando la relación a) anterior, tenemos



$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\theta)\cdot \text{sen}(\theta)\sqrt{(\rho')^2+(\rho)^2}\, d\theta$$

$$A = 2\pi \int_{0}^{\pi} 2(1+\cos\theta)\cdot \text{sen}\theta\sqrt{[-2\text{sen}\theta]^2+[2(1+\cos\theta)]^2}\, d\theta$$

$$A = 8\pi \int_{0}^{\pi} (1+\cos\theta)\cdot \text{sen}\theta\sqrt{2+2\cos\theta}\, d\theta = 8\sqrt{2}\,\pi \int_{0}^{\pi} -(1+\cos\theta)^{3/2}\, d(\cos\theta)$$

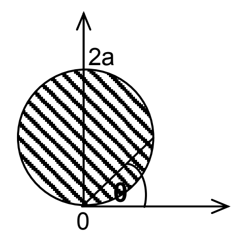
$$A = -8\sqrt{2}\,\pi\cdot \frac{2}{5}[1+\cos\theta]^{5/2}\Big|_{0}^{\pi} = 8\sqrt{2}\,\pi\cdot\frac{2}{5}\cdot 2^{5/2} = \frac{2^7}{5}\pi_{//}$$

2) La curva $\rho = 2a\ \text{sen}\,\theta$ gira sobre su eje polar. Hallar el área de su superficie.

Solución:

El gráfico de la curva dada es la circunferencia mostrada en la figura.

Como gira en torno del eje polar, usamos



$$A(s) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\theta)\cdot \text{sen}(\theta)\sqrt{(\rho')^2+(\rho)^2}\, d\theta$$

$$\Rightarrow \quad A(s) = 2\pi \int_{0}^{\pi} 2a\cdot\text{sen}^2\theta\sqrt{[2a\cos\theta]^2+[2a\,\text{sen}\theta)]^2}\, d\theta$$

$$A(s) = 8a^2\pi \int_{0}^{\pi} \text{sen}^2\theta\, d\theta = 8a^2\pi\cdot\frac{1}{2}[\theta+\text{sen}\theta\cdot\cos\theta]\Big|_{0}^{\pi} = 4a^2\pi^2{}_{//}$$

MOMENTOS DE INERCIA Y CENTRO DE MASA DE UNA LÁMINA

Recordemos algunas fórmulas para obtener la masa **m** de una lámina, sus momentos $\mathbf{M_x}$, $\mathbf{M_y}$, su Centro de Gravedad (ó Centro de Masa) $\overline{X}, \overline{Y}$:

a) Masa: $\boxed{\mathbf{m} = \delta\cdot\int_a^b f(x)\,dx}$; densidad $\delta = \dfrac{\text{masa}}{\text{unidad de área}}$

b) Momentos:

$$\boxed{\mathbf{M_x} = \delta \cdot \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

$$\boxed{\mathbf{M_y} = \delta \cdot \int_a^b x \cdot f(x)\,dx}$$

c) Centro de Gravedad $G(\overline{X},\overline{Y})$: $\overline{X} = \dfrac{\mathbf{M_y}}{\mathbf{m}}$; $\mathbf{\overline{Y}} = \dfrac{\mathbf{M_x}}{\mathbf{m}}$, esto es:

$$\boxed{\mathbf{\overline{X}} = \frac{\int_a^b x \cdot f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}} \; ; \qquad \boxed{\mathbf{\overline{Y}} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}}$$

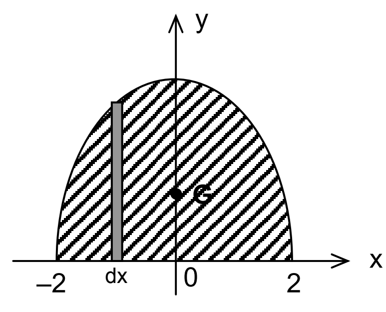
<u>Ejemplo</u>:

Hallar las coordenadas del Centroide o Centro de Gravedad de la lámina plana y homogénea (es decir, de densidad constante), acotada por

$$y = 4 - x^2 \; ; \qquad y = 0$$

<u>Solución</u>:

Sea k = densidad de la lámina. Entonces



a) $\mathbf{m} = \delta \int_a^b f(x)\,dx = k\int_{-2}^{2}(4 - x^2)\,dx$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{m} = \frac{32}{3}k.$$

b) $\mathbf{M_x} = \dfrac{k}{2}\int_{-2}^{2}(4 - x^2)^2\,dx = k\int_0^2 (16 - 8x^2 + x^4)\,dx = \dfrac{256}{15}k.$

$$\mathbf{M_y} = k\int_{-2}^{2}(4x - x^3)\,dx = k\left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{2} = k \cdot 0 = 0.$$

c) $$\overline{X} = \frac{\int_a^b x \cdot f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} = \frac{0}{32k/3} = 0$$

$$\overline{Y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} = \frac{256\,k/15}{32k/3} = \frac{8}{5}$$

Por consiguiente, el Centro de Gravedad tiene coordenadas

$$G = (\overline{X}, \overline{Y}) = (0, \tfrac{8}{5})_{//}$$

GUÍA # 2 Ejercicios Propuestos:

1.-Calcular el área de la región plana limitada por las curvas:

a) $y = x^2 : y = 8 - x^2$ b) $y = 2x^2 : y = 5x - 3$ c) $y = x^3 : y = 2x^3 + x^2 - 2$

d) $y = x^3 : y + x = 0 : y = x + 6$ e) $y = x^3 : y = 2x - x^2$ f) $y^2 = x : y^2 = 2x - 6$

g) $y = \dfrac{1}{1+x^2} : y = \dfrac{x^2}{2}$ h) $y = e^x : y = e^{-x} : x = 1$.

2.- Hallar el área entre el eje x y la cicloide: $x = a(t - Sent)$ $y = a(1 - Cost)$.

3.- Calcular el área d encerrada por una onda de la curva: $x = 2t - Sent$ $y = 2 - Cost$,
Y la tangente a ella en su punto inferior (y=1).

4.- Hallar el área encerrada por la curva: $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$ $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$

5.- Calcular el área encerrada por las curvas en polares:

a) $\rho = 3Sen3\theta$ b) $\rho^2 = 4Sen2\theta$ c) $\rho = 5(1 + Sen\theta)$ d) $\rho = 3 + 2Sen\theta$.

e) $\rho^2 = a^2 Sen4\theta$ f) $\rho = 2 + Cos\theta$

6.- Calcular el área encerrada :

a) Dentro de $\rho = 2 + Cos\theta$ y fuera de $\rho = 2$

b) Dentro de $\rho^2 = 4Cos\theta$ y fuera de $\rho = 1 - Cos\theta$

7.- Calcular los volúmenes de los sólidos por rotación sobre el eje x de las regiones cerradas:

a) $y = 1 - x^2 \quad ; x = 0 \ ; x = 1$

b) $y = x^3; x = 1 \quad ; x = 2$

c) $y = \dfrac{1}{x}; x = 1; \ x = t > 1$ (y $\lim\limits_{t \to \infty} t$)

8.- Mediante el método de las secciones transversales calcular el volumen de los cuerpos de rotación de las áreas encerradas por:

a) $y = x - x^3 \quad ; y = 0 \ \ 0 < x < 1 \ sobre \ eje \ x$

b) $y = x^2 \ \ y = 4 \ x = 0$, $sobre \ y = 4$.

c) $y = x^2 y = 4x \ sobre \ x = 5$

d) $y = x^2 \ \ x = y^2 \ sobre \ eje \ y$; sobre x=1; sobre y=1

9.- Encontrar el volumen del sólido de rotación por giro sobre el eje x del área limitada por: $x = 2y^3 - y^4$ (Observe que el método de las capas cilíndricas es más conveniente que el de las secciones transversales.).¿Si gira sobre el eje y?

10.- La región acotada por : $y^2 = 4x$; $y = x$, gira sobre el eje x, encontrar el volumen por los dos métodos.

11.- Hallar el volumen por rotación de la Astroide: $x = aCos^3 t \ \ y = Sen^3 t$, al girar sobre un eje coordenado.

12.- Calcular el volumen del cuadrado variable, cuyo plano es perpendicular al eje x y tiene dos vértices apoyado en las parábolas. $y^2 = 16x \quad y^2 = 4x$,cuyo lado es la diferencia de las ods ordenadas que se mueve entre x=0 y x=4.

13.- Dentro de los cuerpos de sección conocida se tienen al Elipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ y el Hiperboloide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ .Calcular el volumen de ambos.

14.- Calcular la longitud de arco de :

a) $f(x) = (x+1)^{3/2} \quad 3 \le x \le 8$.

b) $f(x) = \frac{2}{3}(x)^{3/2} - \frac{1}{2}(x)^{1/2} \quad 1 \le x \le 4$.

c) $f(x) = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1}dt \quad 1 \le x \le 3$.

15.- Calcular la longitud de la curva paramétrica: $\begin{matrix} x = a(2Cost - Cos2t) \\ y = a(2Sent - Sen2t) \end{matrix}$ y $\begin{matrix} x = aCos^3 t \\ y = aSen^3 t \end{matrix}$

16.-Hallar la longitud total de : $\rho = a(1 + Cos\theta)$.

17.- Hallar el área de la superficie del “huso” que resulta de girar una semi onda de y=Secx alrededor del eje x.

18 Hallar el área de la superficie de revolución de la Astroide.

19 Hallar el área de la superficie del elipsoide (elipse que gira sobre el eje x)

20.- Hallar el área de la superficie cuando gira un arco de cicloide sobre el eje x.ñ

21.- Hallar el área de la superficie cuando gira la lemniscata: $\rho^2 = a^2 Cos2\theta$

8.- INTEGRALES IMPROPIAS.-

Ejercicios Resueltos

Una integral cuando el intervalo es de la forma: $(-\infty, b]$ *ó* $[a, \infty)$ *ó* $(-\infty, \infty)$ ó en él la función no es acotada, decimos que se trata de una "**integral impropia**". Así por ejemplo la integral $\int_a^{\infty} f(x)dx$ es una integral impropia pero si $\int_a^{b} f(x)dx$ existe y también: $\lim_{b\to\infty}\int_a^{b} f(x)dx = l$, decimos que la integral es **convergente** a l y denotamos $\int_a^{\infty} f(x)dx = l$, del mismo modo para $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{b} f(x)dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$, cuando la integral no es convergente decimos que es **divergente**.

Ejercicios resueltos:

1.- Calculemos: $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$,

Solución:

$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-b}+1\right] = 1$,por lo tanto la integral es convergente a 1 por ello denotamos : $\int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1$.

2.- Calculemos: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$

Solución:

. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\left[Lnb-Ln1\right]=\infty$ luego la integral diverge.

3.- Calculemos: $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$.

Solución

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{b^{1-p}-1}{1-p}\right]=\begin{cases}\frac{1}{1-p} & \frac{Si\ \ p>1}{} \\ \infty & Si\ \ p\le 1\end{cases}.$$

4.-Calculemos: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

Solución:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\left[ArcTgx\right]^0_{\ a}+\lim_{b\to\infty}\left[ArcTgx\right]^b_{\ 0}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left[-ArcTga\right]+\lim_{b\to\infty}\left[ArcTgb\right]=-(-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}=\pi$$

Otro tipo de integral impropia es cuando la función no es acotada en el intervalo, así si la función se hace infinita en a ó en b tendremos:

a) $\int_a^{b} f(x)dx=\lim_{c\to a^+}\int_c^{b} f(x)dx$ b) $\int_a^{b} f(x)dx=\lim_{c\to b^-}\int_a^{c} f(x)dx$. Si ello ocurre en $d\in\left[a,b\right]$ tendremos:

$$\int_a^{b} f(x)dx=\int_a^{d} f(x)dx+\int_d^{b} f(x)dx .$$

5.- Calculemos: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Solución:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b\to 1^-}\left[2-\sqrt{1-b}\right] = 2\,.$$

6.- Calculemos: $\int_0^1 \frac{dx}{x}$.

Solución:

$\int_0^1 \frac{dx}{x}$.= $\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{dx}{x} = \lim_{x\to a^+}\left[Ln 1 - Ln\, a\right] = \infty$ .La integral diverge.

Observación:

En el cálculo para Ingeniería tienen gran relevancia las integrales impropias:

a) $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$,función gamma

b) $L(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)dx$ Transformada de Laplace.

Ejercicios propuestos.

1.- Analizar la convergencia de las integrales impropias:

a) $\int_3^\infty e^{-2x}dx$

b) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$

d) $\int_0^2 \frac{dx}{4-x^2}$

e) $\int_{-\infty}^\infty |x|e^{-x^2}dx$

c) $\int_{0}^{2} \frac{Lnx}{\sqrt{x}} dx$ f) $\int_{e}^{\infty} \frac{dx}{xLnx}$

9.-ANEXOS

I).- SERIES REALES.-

Ejercicios resueltos.

1.- Aplicando el criterio de comparación por defecto o por exceso ,analizar las series:

a) $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1}$ b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{Ln(n)}$ c) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n+1}{n^n}$

Solución.

a) Puesto que $\frac{1}{3^n + 1} < \frac{1}{3^n}$ y como la serie geométrica razón $\frac{1}{3}$, $\sum_{n} (\frac{1}{3})^n$ converge, entonces la propuesta también converge.

b) Como $\frac{1}{n} < \frac{1}{Ln(n)}$ y la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ diverge, la serie mayor que ella también diverge.

c) Se puede probar por inducción que : $\frac{n+1}{n^n} < \frac{1}{n^2}$,como la serie "p"; $p > 1$, $\sum \frac{1}{n^2}$,es convergente ,la serie menor también es convergente.

2.- Comparando mediante el límite del cuociente, analizar las series:

a) $\sum_{0}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3 - 3}$ b) $\sum_{1}^{\infty} Sen(\frac{1}{n})$ c) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

Solución.

a) Aplicando la serie convergente $\sum \frac{1}{n^2}$,se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{2n^3+3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2}{2n^3-3} = \frac{1}{2} \in R^+$$ Entonces ambas convergen por lo tanto la propuesta.

b) Como $\sum \frac{1}{n}$ es divergente y $\lim_{n\to\infty} \frac{Sen(1/n)}{1/n} = 1$ Entonces la nuestra diverge.

c) La serie p $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} \frac{1/n^n}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{n-2}} = 0$ por lo tanto nuestra serie es convergente.

3.- El criterio de la raíz de Cauchy es aplicable a los siguientes ejemplos:

a) $\sum_1^\infty \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{3n} \cdot \frac{1}{3n}$ b) $\sum_2^\infty (\frac{1}{Ln(n)})^n$ c) $\sum_0^\infty \frac{e^n}{n^n}$ d) $\sum_0^\infty e^{2n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ e) $\sum_1^\infty \sqrt{n} (\frac{2n-1}{n+13})^n$.

Solución.

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{3n}} = \lim_{n\to\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{3}\sqrt[n]{n}} = 2^3 \cdot \frac{1}{1\cdot 1} = 8 > 1$ diverge.

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{Ln(n)}\right) = 0 < 1$, luego la serie converge.

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n} = 0$, la serie converge.

d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} e^2 \left(\frac{1}{(1+1/n)^n}\right) = e > 1$, por lo tanto diverge.

e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2n}} \left(\frac{2n-1}{n+13}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n}} \cdot \left(\frac{2-1/n}{1+13/n}\right) = 2 > 1$, serie divergente.

4.- Aplicando el criterio de D'Alambert, analizar las series:

a) $\sum \dfrac{n}{2^n}$ b) $\sum \dfrac{n!}{n^n}$ c) $\sum \dfrac{3\cdot5\cdot7\cdot......\cdot(2n+1)}{n!}$ d) $\sum \dfrac{(n!)^2 3^n}{(2n)!}$

Solución.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \dfrac{2^n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2} < 1$ converge.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \dfrac{n^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{n}{n+1})^n = 1/e < 1$ converge.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\cdot5\cdot7\cdot......(2n+3)}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{3\cdot5\cdot7\cdot.......\cdot(2n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{n+1} = 2 > 1$ diverge

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!^2\, 3^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3(n+1)}{2(2n+1)} = 3/2$ Diverge

5.- Hallar la suma de la serie: $\sum_0^\infty \dfrac{n}{(n+1)!}$.

Solución.

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow S_n = \sum_0^n \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \to 1 \quad \textit{Suma telescópica}$$

Luego la serie converge a 1 o bien tiene suma 1.

6.- Analizar la serie "p" $\sum_1^\infty \dfrac{1}{n^p},\ p \in R^+$

Solución.

Aplicando el criterio de la integral: "Para f(x) continua en $[1,\infty)$ decreciente a cero tal que f(n)= a_n término general de la serie $\sum_1^\infty a_n$ .Entonces si la integral impropia $\int_1^\infty f(x)dx$ converge o diverge ,la serie también converge o diverge"

$\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to\infty} \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right) = \frac{1}{p-1}\ si\ \ p>1$,ó $\infty\ \ si\ \ p\le 1$ .Entonces las series:

a) $\sum \frac{1}{n^2}$ b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ c) $\sum \frac{e}{n^{\pi}}$ convergen y c) $\sum \frac{1}{n^{2/3}}$ d) $\sum \frac{5}{3}n^{-\frac{3}{5}}$

e) $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ divergen.

7.- Analizar la serie alternante:

a) $\sum$ (-1)$^{n}\ \frac{n}{1+5^n}$ b) $\sum$ (-1)$^{n}\frac{1}{n}$ c) $\sum$ (-1)$^{n+1}\frac{Ln(n)}{n}$ d) $\sum$ (-1)$^{n+1}\frac{1}{n^{5/3}}$

Solución.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{1+5^n} = 0$, luego la serie alternante converge.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,luego la serie alternante $\sum$ (-1)$^{n}\frac{1}{n}$ es convergente pero como $\sum \frac{1}{n}$ diverge, en este caso se habla de una convergencia condicional.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{Ln(n)}{n} = 0$,ello porque si consideramos $f(x) = \frac{Ln(x)}{x}$ aplicando L`Hospital si x tiende a ∞ , el límite es cero.

8.- Analizar la convergencia absoluta o condicional de a). $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{5/3}}$. b) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

Solución.

a) Considerando $\sum|a_n| = \sum\frac{1}{n^{5/3}}$ serie "p" convergente, entonces la serie alternante también converge es decir hay convergencia absoluta.

b) Como : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = 0$,la serie alternante converge según criterio de Leibnitz. Pero $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \sum \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \sum \frac{1}{n+1} Divergente$,Luego se trata de convergencia condicional

9.- Estudiar la convergencia de la serie. $\sum \frac{1}{1+n^2}$.

Solución.

Aplicando el criterio de la integral se tiene
: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} (ArcTg(b) - ArcTg(0)) = \frac{\pi}{2}$ es decir como la integral converge también lo hace la serie.

10.- Estudiar la serie: $\sum \frac{1+2^{n+1}}{3^{n+1}}$.

Solución.

$\sum \frac{1+2^{n+1}}{3^{n+1}}$.= $\sum \left(\frac{1}{3^{n+1}} + (2/3)^{n+1} \right) = \sum \frac{1}{3^{n+1}} + \sum \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}$ ambas convergen por ser series geométricas de razón menor a 1

11.- Discutir las series: a) $\sum Sen(n\pi)$ b) $\sum Cos(2n-1)\frac{\pi}{2}$.

Solución:

a) Converge pues $Sen(n\pi) = 0$ b) Converge pues $Cos(2n-1)\frac{\pi}{2} = 0 \ \forall n$

12.- Probar que el decimal periódico: $3,7\overline{2}$ converge a un racional.

Solución.

$x = 3,7\overline{2} \Rightarrow 10x = 37,\overline{2} = 37 + 0,\overline{2}$ Sea

$$y = 0,\overline{2} = \frac{2}{10} + \frac{2}{10^2} + \dots\dots\dots + \frac{2}{10^n} + \dots. \Rightarrow S_n = \frac{2}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots\dots\dots + \frac{1}{10^n}\right) = \frac{2}{10}\left(\frac{1 - \frac{1}{10^{n-1}}}{1 - \frac{1}{10}}\right)$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{9}$ como $10x = 37 + \frac{2}{9} \Rightarrow x = \frac{1}{10}\left(\frac{335}{9}\right) = \frac{335}{90}.-$

<u>II).-SERIES DE POTENCIAS.-</u>

Ejercicios Resueltos

Se sabe que una serie de potencias tiene la forma**:**

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *ó* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ Además que siempre converge ó en un solo punto: (x = 0 ó x_0) ó un intervalo, por lo que el trabajo es determinar dicho intervalo.

1.- Encontrar el intervalo de convergencia y el radio de convergencia de las series:

a) $\sum\limits_{1}^{\infty}\left(\frac{e^n}{n}\right)x^n$, b) $\sum\limits_{0}^{\infty}\frac{n!}{10^n}x^n$ c) $\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n4^n}$ d) $\sum\limits_{1}\frac{(x+2)^n}{2^n\sqrt{n+1}}$ e) $\sum\limits_{0}\left[\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n}\right](x-1)^n$

f) $\sum \frac{d}{dx}\left[\frac{(x-4)^n}{2n^2+1}\right]$ g) $\sum a_n \int (x-a)^n\, dx \;\; a = \frac{1}{2n^2+1};\; a = 4$ h) $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Como x podría tomar valores negativos ,para aplicar criterios de series de términos no negativos debemos hacer: $a_n = \left|\frac{e^n x^n}{n}\right|$, luego

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\left(\frac{e^{n+1}x^{n+1}}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{n}{e^n x^n}\right)\right| = \lim\limits_{n\to\infty} e\frac{n}{n+1}|x| = e|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{e}, \therefore R = \frac{1}{e}$,

o sea hay convergencia en $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$,Analizando en los extremos:

Si $x=-\frac{1}{e}\Rightarrow\sum(-1)^n\frac{1}{n}$, serie que converge. Si $x=\frac{1}{e}\Rightarrow\sum\frac{1}{n}$ serie que diverge, luego $I=\left[-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$, Es su intervalo de convergencia.

b) Si tomamos $a_n=\frac{n!}{10^n}$ Entonces $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty\therefore R=0$. Luego la serie solo converge para x=0.-

Si procediéramos como en el caso anterior tendríamos: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}|x|=\infty$,luego no puede ser menor que 1 a menos que x= 0.-

c) $\lim_{n\Rightarrow\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n4^n}{(n+1)4^{n+1}}|x|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{4(1+1/n)}=\frac{|x|}{4}$, luego converge si $|x|<4$.En los extremos:

x = -4$\Rightarrow\sum-\frac{1}{n}=-\sum\frac{1}{n}$, divergente. Si $x=4\Rightarrow\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$,convergente así $I=(-4,4]$ es su intervalo.-

d) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sqrt{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+1/n}{1+2/n}}=\frac{1}{2}$, luego hay convergencia si : $\frac{1}{2}|x+2|<1$ o bién

$-2<x+2<2$,luego $I=-4<x<0$ y $R=2$ .En los extremos: a) $x+2=-2\Rightarrow\sum(-1)^n\frac{1}{\sqrt{1+n}}$ serie convergente según el criterio de Leibnitz. b) x+2 = 2 $\Rightarrow\sum\frac{1}{\sqrt{1+n}}$ serie divergente pues es asimilable con la serie “p” : $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergente.-

e) Si suponemos a>b

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left[\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}\right]|x-1|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n}\left[\frac{(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n)\cdot\left(\frac{b}{a}\right)}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}\cdot\right]|x-1|=\frac{b}{a}|x-1|$$ hay convergencia cuando $|x-1|<\frac{a}{b}$;Si $(x-1)=-\frac{a}{b}\Rightarrow$ la serie tomará la

forma: $\sum(-1)^n \frac{\left(a^n+b^n\right)}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n$ Si $(x-1)=\frac{a}{b}$, la serie será $\sum\left(\frac{a^n+b^n}{n}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^n$ en que la convergencia depende de los valores de a y b.

f) $\sum \frac{d}{dx}\frac{(x-4)^n}{2n^2+1}=\sum \frac{n}{2n^2+1}(x-4)^{n-1} \therefore \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\left(2n^2+1\right)}{\left(2(n+1)^2+1\right)}|x-4| \;=|x-4|$

luego hay convergencia si $|x-4|<1 \Leftrightarrow 3<x<5$, el radio es 1. Si (x-4) = -1 la serie será: $\sum(-1)^{n-1}\frac{n}{2n^2+1}=\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{2n+\frac{1}{n}}$, luego converge, Si (x – 4) =1 tendremos la serie: $\sum \frac{n}{2n^2+1}$ y el criterio de la integral me la muestra divergente.

g) $\sum \frac{1}{2n^2+1}\int (x-4)^n\,dx=\sum \frac{(x-4)^{n+1}}{\left(2n^2+1\right)(n+1)}$ luego

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2n^2+1\right)(n+1)}{\left(2n^2+4n+3\right)(n+2)}|x-4|=|x-4|$, el resto ya es conocido.

h) $\sum(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}|x|=0$ luego hay convergencia absoluta en todo el eje.

Ejercicios propuestos.

1.- Señalar radio de convergencia e intervalo de convergencia en las series:

a) $\sum nx^n$ $\quad b)\sum \frac{x^n}{n(n+1)}$ $\quad c)\sum \frac{(x+2)^n}{2^n\sqrt{n+1}}$ $\quad d)\sum \frac{3^n+4^n}{5^n}(x-1)^n$ $\quad e)\sum \frac{4\cdot 7\cdot \ldots .(3n-2)}{(3n)!}x^{3n}$

.

2.- Calcule el intervalo de convergencia de las series anteriores derivando e integrando cada una.

3.- Determinar el intervalo de convergencia de las series de potencias:

a) $\sum(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\quad b)\sum(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ $\quad c)\sum\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}\ 2^n}x^n$ $\quad d)\sum\dfrac{Ln(n)}{n}x^n$ $\quad e)\sum\dfrac{Ln(n)}{e^n}(x-e)^n$

III).- SERIES DE TAYLOR.-

Sabemos que una serie de potencias con radio de convergencia no nulo, define una función real de una variable real f(x), continua diferenciable e integrable, por lo que se reconoce la posibilidad recíproca de representar una función continua y n veces diferenciable como una serie de potencias, de x ó (x-a) conocidas como "Serie de Taylor" ó "Serie de Mc. Laurin".

$f(x)=\sum_{0}^{\infty}\dfrac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.– Desarrollo de la función en torno de $x=x_0$ ó

$f(x)=\sum_{0}^{\infty}\dfrac{f^n(0)}{n!}x^n$.- Desarrollo de la función f(x) en torno de x = 0

Ejercicios resueltos.-

1.- Calcular $f'(x)$ y determinar su radio de convergencia para $f(x)=\sum_{0}^{\infty}\dfrac{(n!)^2x^n}{(2n)!}$.

Solución.-

$f'(x)=\sum_{1}^{\infty}\dfrac{n(n!)^2}{(2n)!}x^{n-1}$, ahora para el radio de convergencia

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)!^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{n(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3|x|}{(2n+1)2(n+1)}=\frac{1}{4}|x|<1\Rightarrow R=4$$

2.- Calcular $\int_0^x f(x)dx$, e identificar el radio de convergencia si $f(x)=\sum_{2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n-1)}$

Solución.-

$$\int_0^x \sum_2^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = \sum_2^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n-1)n(n+1)}$$, para el radio de convergencia: $\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(n-1)}{(n+1)(n+2)n}|x| = |x|$ luego hay convergencia si -1<x<1 o sea R = 1

3.- Desarrollar las siguientes funciones en series de Taylor en torno del punto que se señala:

a) f(x) = a^x si $x_0 = 0$ b) $f(x) = Cos(x)$ si $x_0 = \frac{3\pi}{4}$ c) $f(x) = \sqrt{1+x}$ Si $x_0 = 0$

Solución.-

a)

$$f(x) = a^x;\ f'(x) = a^x Ln(a);\ f''(x) = a^x (Ln(a))^2 ....:\ f^{(n)}(x) = a^x (Ln(a))^n$$

$$\Rightarrow a^x = \sum_0^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum \frac{(Ln(a))^n}{n!} x^n$$ .Como $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{Ln(a)}{n+1}|x| = 0 \Rightarrow converge\ \forall x$

b) $f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{f^n(3\pi/4)}{n!}(x-3\pi/4)^n$

$$f = Cosx \Rightarrow f(3\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f' = f^{(5)} = f^{(9)} = ... = f^{(4n-3)} = -Senx \Rightarrow f^{(4n-3)}(3\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'' = f^{(6)} = f^{(10)} = ... = f^{(4n-2)} = -Cosx \Rightarrow f^{(4n-2)}(3\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f''' = f^{(7)} = f^{(11)} = ... = f^{(4n-1)} = Senx \Rightarrow f^{(4n-1)}(3\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$Cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1-(x-3\pi/4)+\frac{1}{2!}(x-3\pi/4)^2+\frac{1}{3!}(x-3\pi/4)^3-\frac{1}{4!}(x-3\pi/4)^4-\frac{1}{5!}.(x-3\pi/4.)^5..........\right)$$

c)

$$f = (1+x)^{-\frac{1}{2}} \quad f' = -\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \quad f'' = \frac{1\cdot3}{2^2}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \quad f''' = -\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3}(1+x)^{-\frac{7}{2}}.........$$

$$\Rightarrow f^{(k)} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot.....(2k-1)}{2^k}(1+x)^k \therefore f^{(k)}(0) = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot......\cdot(2k-1)}{2^k}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_{0}^{\infty}\frac{1{\cdot}3{\cdot}5\text{..........}(2k'-1)}{2^k\,k!}x^k=\sum\ \frac{1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}\text{..........}2k}{2^k\cdot k!{\cdot}2{\cdot}4{\cdot}6{\cdot}\text{......}2k}\,x^k=\sum\frac{(2k)!}{2^{2k\cdot}\cdot(k!)^2}x^k$$

Su intervalo de convergencia está dado por:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2k+2)!}{2^{2k+2}\cdot(k+1)!^2}\cdot\frac{2^{2k}\cdot(k!)^2}{(2k)!}|x|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2k+1)(2k+2)}{4\cdot(k+1)^2}|x|=|x|<1\Rightarrow -1<x<1.$$

4.- A partir de $e^x=\sum_{0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, Obtener la serie de Taylor para a) $f(x)=xe^{3x}$ b) $f(x)=Cosh(x)$.

c) $f(x)=Senh(x)$

Solución:

a) $e^{3x}=\sum\frac{(3x)^k}{k!}\Rightarrow xe^{3x}=\sum\frac{3^k}{k!}x^{k+1}$.Como $\lim_{n\to\infty}\left|\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3^n}|x|=3|x|<1\Rightarrow R=1/3$

b) Como: $e^x=\sum_{0}^{\infty}\frac{x^k}{k!},\Rightarrow e^{-x}=\sum(-1)^k\,\frac{x^k}{k!}$ como:

$$Cosh(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\Rightarrow Cosh(x)=\frac{1}{2}\sum\frac{(1+(-1)^k)}{k!}x^k=\sum\frac{x^{2k}}{k!}.\qquad \forall x$$

$$Senh(x)=\frac{d}{dx}Cosh(x)=\frac{d}{dx}\sum\frac{x^{2k}}{k!}=\sum\frac{2kx^{2k-1}}{k!}\quad \forall x\in R$$

5.- Si

$f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum x^k.\ |x|<1$. Encontrar las series para

$:a)\,f(x)=\frac{1}{1+x}\qquad b)\,f(x)=\frac{1}{1+x^2}\qquad c)\,f(x)=ArcTgx\qquad d)\ f(x)=Ln(1+x)$

Solución:

a) $\frac{1}{1+x}=\sum(-x)^k=\sum(-1)^k x^k\quad |x|<1$

b) $\frac{1}{1+x^2}=\sum(-1)^k x^{2k}\ ;|x|<1,$

c) $ArcTgx = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum \int_0^x (-1)^k x^{2k} dx = \sum (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$; $|x|<1$ Pero también converge para x = 1 por lo tanto en ese punto: $ArcTg(1) = \pi/4 = \sum (-1)^k \frac{1}{2k+1}$.-

d) Ln(1+x)=$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \sum (-1)^k \int_0^x x^k dx = \sum (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ $|x|<1$.Si hacemos x = 1 tenemos la serie convergente a Ln(2)

6.- Encontrar el desarrollo en serie de Taylor para $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ $\alpha \in R$, llamada "Serie binomia"

Solución.

$f = (1+x)^{\alpha}$ $f' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ $f'' = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$.............$f^{(k)} = \alpha(\alpha-1)$.........$(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$..........$(\alpha-k+1) \Rightarrow f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)..............(\alpha-k+1)}{k!}(x)^k$,

Su radio de convergencia: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha-n||x|}{n+1} = |x| < 1$,luego R = 1.

Observación:

Si: $\alpha \in N \Rightarrow f^{n}(x) = 1\cdot2\cdot3.........\alpha \ y \ f^{(n+1)}(x) = 0$

$\therefore f(x) = \sum_0^{n} \frac{n(n-1)(n-2).......(n-k+1)}{k!}x^k = \sum \frac{1\cdot2\cdot3...........(n-k)\cdot(n-k+1)...........n}{1\cdot2\cdot3.........(n-k)\cdot k!}x^k$ luego

$f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}x^k = (1+x)^n = \sum \binom{n}{k} x^k$ El conocido desarrollo del binomio de Newton.

De lo anterior ampliamos la notación $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)............(\alpha-k+1)}{k!}$ $\alpha \in R$ De ese modo denotamos : $(1+x)^{\alpha} = \sum_0^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ $\alpha \in R$ $|x|<1$

Ejemplo:

Para desarrollar: $\sqrt{1+x} \Rightarrow (1+x)^{1/2} = \sum_{0}^{\infty}\binom{1/2}{k}x^k$

donde:.

$$\binom{1/2}{0}=1;\ \binom{1/2}{1}=1/2\ ;\binom{1/2}{2}=\frac{1/2\cdot(1/2-1)}{2!}=\frac{1}{2^2 2!}\ ;\binom{1/2}{3}=\frac{1/2\cdot(1/2-1)\cdot(1/2-2)}{3!}=\frac{1\cdot 3}{2^3 3!}$$

$$\binom{1/2}{k}=(-1)^{k+1}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot.........2k-3}{2^k k!}\right)\cdot\frac{2\cdot4\cdot............\cdot2k-4}{2\cdot4\cdot..............\cdot2k-4}=(-1)^{k+1}\frac{(2k-3)!}{2^{2k-2}k!(k-2)!}\Rightarrow$$

$$\sqrt{1+x}=\sum_{2}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2k-3)!}{2^{2k-2}k!(k-1)!}x^k+1+\frac{x}{2}$$

7.- empleando los argumentos pertinentes; Calcular: a) $\int_0^1 \frac{Sen(x)}{x}dx$ b) $\int_0^1 Sen(x^2)dx$

Solución.

a) Siendo: $Sen(x)=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\ \forall x\in R \Rightarrow \frac{Sen(x)}{x}=\sum_{1}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-1)!}\ \therefore$

$$\int_0^1\frac{Sen(x)}{x}=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}\int_0^1 x^{2k-1}dx=\sum\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}\frac{x^{2k}}{2k}\Bigg|_0^1=\sum\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}$$

b) Como $Sen(x)^2=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(x^2)^{2k-1}}{(2k-1)!}$, aplicando integración se obtiene lo buscado.

Ejercicios propuestos.

1.- Desarrollar en serie de potencias de x las funciones:

a) $f(x)=x^2e^x$ $\quad b)\ f(x)=xSen(5x)$ $\quad c)\ f(x)=Cos^2(x)$ $\quad d)\ f(x)=xe^{-3x}$

2.- Hallar el desarrollo en serie de potencias de x de las funciones:

a) $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ $\quad b)\ f(x)=\frac{1}{(1-x)^3}$ Empleando derivación.

3.- Demostrar que $\sum_{1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=-\int_0^x\frac{Ln(1-t)}{t}dt$

4.- Demostrar que $\sum_{0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}x^n=\frac{1}{(x-1)^4}$

5.- Calcule $\int_0^1 e^{-x^2}dx$

IV).-Series de Fourier:

Dentro del tema de la representación de funciones reales de variable real, ya hemos abordado el de las series de Taylor, pero para ello la función a representar debe tener derivadas de todo orden, ahora para funciones con menos restricciones tenemos la forma de Series de Fourier que es una serie de funciones trigonométricas, la que pasamos a abordar sin profundizar en el tema de la convergencia de ellas, para dedicarnos a la parte más elemental como es la construcción de la Serie.

Una Serie de Fourier, para una función $f(x)$, seccionalmente continua en $(-l,l)$ tiene la expresión:

$$\boxed{\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}a_k Cos(\frac{k\pi}{l}x)+b_k Sen(\frac{k\pi}{l}x)}.$$

Que en virtud de la convergencia podemos escribir

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}a_k Cos(\frac{k\pi}{l}x)+b_k Sen(\frac{k\pi}{l}x)},$$

por lo que nos queda por calcular los llamados "coeficientes de Fourier" a_0 ; a_k; b_k .-

$$\boxed{a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx \quad a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)Cos\left(\frac{k\pi}{l}\right)xdx \quad b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)Sen\left(\frac{k\pi}{l}\right)xdx}.$$

Los detalles de esto se encontrará en los apuntes del curso.-Para el caso particular de funciones definidas en $\left[-\pi,\pi\right]$, la serie y sus coeficientes se obtienen cambiando l por π

Ejercicios resueltos:

1.-.- Determinar **los coeficientes de Fourier,** de la función:

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ \pi/2 & 0<x\le\pi/2\\ 0 & \pi/2<x<\pi\end{cases}$$

Solución.

Los coeficientes serán: $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$ = $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi/2}\frac{\pi}{2}dx$ =……….= $\frac{\pi}{4}$.

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)Coskxdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\frac{\pi}{2}Coskxdx=..........\frac{1}{2k}Senk\frac{\pi}{2}=$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)Senkxdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\frac{\pi}{2}Senkxdx=..........\frac{1}{2k}(1-Cosk\frac{\pi}{2})=\begin{cases}\frac{1}{2k}........k\ impar\\ \frac{1}{k}......k=2,6,10,14...\\ 0\ ....k=4,8,12,16\end{cases}$$

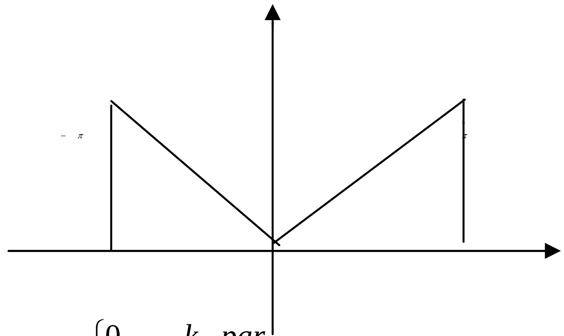
2.- Encontrar la **Serie de Fourier** de la función:

a) $f(x)=\begin{cases}-x......-\pi\le x\le 0\\ x.............0\le x\le\pi\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}\pi+x & -\pi<x<0\\ x & 0<x<\pi\end{cases}$

Solución

a) Como lo muestra el gráfico es una función par

luego su Serie será :

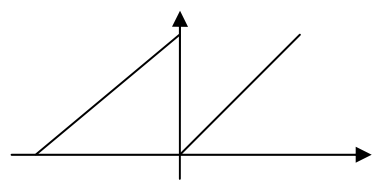


$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_k Coskx \text{, con } a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \pi$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xCoskxdx = ...\frac{1}{k^2}(Cosk\pi - 1) = \begin{cases} 0........k \quad par \\ \frac{-2}{k^2}....k \quad impar \end{cases}$$

La **S de F** será: $\frac{\pi}{2} - 2\sum_{1}^{\infty}\frac{Cos\,(2k-1)x}{(2k-1)^2}$

b) Observando la figura la serie es de la forma



$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_k Coskx + b_k Senkx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \pi \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)Coskxdx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xCoskxdx = ------ = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)Senkxdx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xSenkxdx = ------- = \frac{2}{k} \text{ } Si \text{ } k \text{ } par \text{ luego}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{1}^{\infty}\frac{Sen2kx}{k}$$

3.- Determinar la representación en Serie de Fourier para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Graficar la extensión periódica que ella representa y probar que: $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

Solución.

Fig.

La serie debe ser de la forma: $\frac{a_0}{2}+\sum_1^{\infty} a_k Coskx + b_k Senkx$; donde :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{\pi}{2} \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xCoskxdx = \frac{1}{\pi k^2}(Cosk\pi - 1) = \begin{cases} 0.............k.....par \\ \frac{-2}{\pi k^2}...........k....impar \end{cases}$$

$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xSenkxdx = \frac{1}{k}(-1)^{k+1}$ **.** Luego la representación será:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum \frac{Cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} + \frac{(-1)^k \pi}{2k} Senkx\,.$$

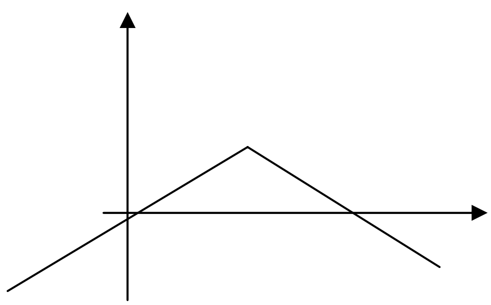
En x = 0 la serie converge al valor de la función, por ser continua $\Rightarrow$

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \;\Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_1^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Sin embargo en $x = \pi$ converge al valor promedio de los limites laterales o sea a $\frac{\pi}{2}$ y el resultado es el mismo.

4.- Hallar la Serie de Fourier parta la función $f(x) = \begin{cases} x & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi - x & \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$.

Solución



Aquí el intervalo es $(-\pi/2, 3\pi/2)$ por lo que la serie debe tener la fórmula más general aunque (b-a) = 2π, luego será de la forma.

$\frac{a_0}{2} + \sum a_k Coskx + b_k Senkx$, siendo $a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} xdx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}(\pi - x)dx\right)$ = 0

$a_k = \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} xCoskxdx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\pi Coskxdx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} xCoskxdx)$ = 0

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} xSenkxdx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \pi Senkxdx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} xSenkxdx\right) =$$

$$= \frac{3}{\pi k^2}\begin{cases}(-1)^{k+1}........k \;\; impar \\ 0................k \;\; par\end{cases} + \frac{1}{2k}\begin{cases}0................k \;\; impar \\ (-1)k.........k \;\; par\end{cases}$$

Luego la serie de Fourier para esta función queda:

$$\sum \frac{3(-1)^k}{\pi(2k-1)^2} Sen(2k-1)x + \frac{(-1)^k}{4k} Sen2kx.$$

Observación.

Nótese que al trasladar el gráfico de la función dada hacia la izquierda en $\pi/2$ se transforma en una función par cuya serie no es la misma.

5.- Encontrar la Serie de Fourier y su Serie de Cosenos para la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 - x................0 \le x \le 1 \\ x - 3/2..............1 < x \le 2 \end{cases}$$

Fig.

Solución.

a) Como el intervalo es de dimensión 2 la Serie tomará la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_k Cos\, k\pi x + b_{ki} Senk\,\pi x\ ,$$

con $a_0 = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 (1/2 - x)dx + \int_1^2 (x - 3/2)dx = 0$

$$a_k = \int_0^1 (1/2 - x)Cos k\pi x\, dx + \int_1^2 (x - 3/2)Cos\, k\pi x\, dx = \ldots\ldots\ldots \begin{cases} 0\ldots\ldots\ldots\ldots k\ \ par \\ \dfrac{4}{k^2\pi^2}\ldots.k\ impar \end{cases}$$

$$b_k = \int_0^1 (1/2 - x)Sen\, k\pi x\, dx + \int_1^2 (x - 3/2)Sen\, k\pi x\, dx = \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} 0\ldots\ldots\ldots\ldots k\quad par \\ -\dfrac{3}{k\pi}\ldots\ldots k\quad impar \end{cases}$$

Así la S de F quedará:

$$\boxed{\frac{4}{\pi^2}\sum \frac{Cos(2k-1)k\pi x}{(2k-1)^2} - \frac{3}{\pi}\sum \frac{Sen(2k-1)k\pi x}{(2k-1)}}$$

b) La extensión par de la función hace que la Serie sea

$: \dfrac{a_0}{2} + \sum a_k Cos \dfrac{k\pi}{2}x$ con (b-a) = 4

Donde $a_0 = 2 \cdot \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 f(x)dx = 0$ y $a_k = 2 \cdot \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 f(x)Cos\dfrac{k\pi}{2}xdx$

$$a_k = \int_0^1 \frac{1}{2}Cos\frac{k\pi}{2}x\,dx - \int_0^1 xCos\frac{k\pi}{2}x\,dx + \int_1^2 xCos\frac{k\pi}{2}xdx - \frac{3}{2}\int_1^2 Cos\frac{k\pi}{2}xdx =$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{16}{k^2\pi^2}$ $si \quad .k = (2,6,10\ldots\ldots\ldots(4k-2)).$

La Serie: $\boxed{\dfrac{16}{\pi^2}\sum \dfrac{Cos\dfrac{(4k-2)\pi}{2}x}{(4k-2)^2}}$.(¿)

Observación .

Para hacer más fácil el trabajo se puede recurrir a las tablas de integrales de ahí que se han omitido las integrales y otros cálculo tediosos.

Ejercicios propuestos.

1.- Escribir la Serie de Fourier de las funciones:

a) $f(x)=e^{|x|} \quad -\pi \le x \le \pi$ b) $f(x)=Sen\pi x \quad 0<x<1$

c) $f(x)=\begin{cases} x+\pi & -\pi<x<0 \\ x-\pi & 0\le x\le \pi \end{cases}$ Graficar la extensión periódica d) $f(x)=e^{-x}$ -1<x<1

e) $f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi<x<0 \\ \pi/2 & 0<x<\pi/2 \\ 0 & \pi/2<x<\pi \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi<x<0 \\ x & 0<x<\pi \end{cases}$ Graficar su extensión periódica y evaluar en x = 0

2.- Si $f(x)=1-|x| \quad -1\le x\le 1$,hallar su Serie de Fourier y deducir la convergencia de la serie numérica: $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$

3.- Determinar la Serie de Fourier para la función $f(x)=|x| \quad -4\le x\le 4$ con ello deducir la convergencia numérica del ejercicio anterior.

4.- Desarrollar en serie de cosenos la función f(x)= Sen x y analizar su convergencia para x = 0.

5.- Desarrollar en Serie de Fourier f(x) = $x^2 \quad 0\le x\le 2\pi$, y con ello pruebe que $\frac{\pi^2}{16}=\sum\frac{1}{k^2}$

6.- Dada la función de impulso unitario: $f(x)=\begin{cases} -1 & -\pi\le x\le 0 \\ 1 & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ -1 & \frac{\pi}{2}\le x\le \pi \end{cases}$

¿Cuál es el valor de la serie si a) $x=k\pi$ b) x= $(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in Z$?

7.- Desarrolle la función: $f(x)=e^{x} \quad 0<x<2 \quad a)$ En serie completa de Fourier.

b) En serie de solo senos. c) En serie de solo cosenos. Grafique la extensión periódica de cada una.

8.- Encuentre la serie de cosenos para ;: $f(x) = Sen(x) \quad 0 < x < \pi$

9.- Si $f(x) = x^2 \quad 0 \leq x \leq 2\pi$. Probar que : $\dfrac{\pi^2}{6} = \sum \dfrac{1}{k^2}$