

1.6 ASINTOTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

1.6.1.- Definición.

Una asíntota es una recta que se encuentra asociada a la gráfica de algunas curvas y que se comporta como un límite gráfico hacia la cual la gráfica se aproxima indefinidamente pero nunca la toca y mucho menos la brinca. A medida que la variable independiente de la función tiende hacia un cierto valor, la correspondiente variable dependiente tiende a infinito, cualquiera que este sea. En general, la recta puede tener cualquier orientación, sin embargo, en nuestro caso únicamente estudiaremos las:

- Asíntotas Verticales.

Como su nombre lo indica, son rectas verticales asociadas a la función. Se encuentran presentes únicamente en funciones racionales de la forma:

$$f(x) = g(x) / h(x)$$

y se determinan encontrando las raíces del denominador $h(x)$ correspondiente. Tales valores reciben el nombre de Polos de la función. Entonces, el número de polos asociados a una función determinarán el número de asíntotas verticales que tiene tal función. Sea el ejemplo siguiente:

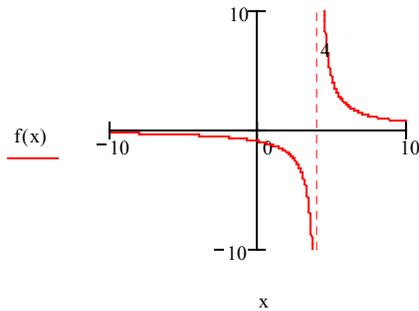
- Obtenga las asíntotas verticales de la función:

$$f(x) := \frac{4}{x - 4}$$

Como lo indicamos en el párrafo anterior, para determinar las asíntotas de ésta función obtenemos sus polos, los que, como ya mencionamos, son los valores de “ x “ para los cuales $h(x) = 0$. Sabemos que en los casos en los cuales $h(x) = 0$ la función se indetermina es decir su valor tiende a infinito. En este ejemplo la asíntota se encuentra en:

$$x - 4 = 0 \quad ; \quad \text{es decir en} \quad x = 4.$$

La recta $x = 4$ es la asíntota de esta función, que es única, ya que el denominador es un término lineal lo que implica que solamente en un valor se anula. La gráfica correspondiente se muestra en la figura siguiente. En ella vemos que a medida que x se aproxima a 4 el cociente aumenta indefinidamente.



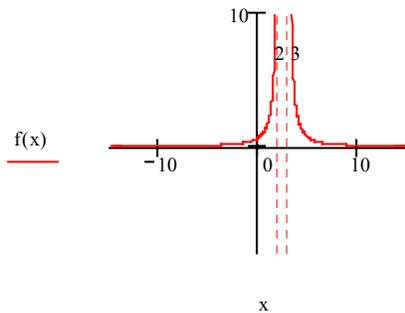
Resumen:

A las rectas $x = x_0$ [polos de $f(x)$] se les llama asíntotas verticales de $f(x)$.

Los polos de $f(x)$ son rectas hacia la cual tiende la grafica sin tocarla. A medida que la x tiende hacia el valor de la asíntota el cociente aumenta indefinidamente y la curva se aproxima a la recta.

- Obtenga las asíntotas de la siguiente función:

$$f(x) := \frac{4}{x^2 - 5x + 6}$$

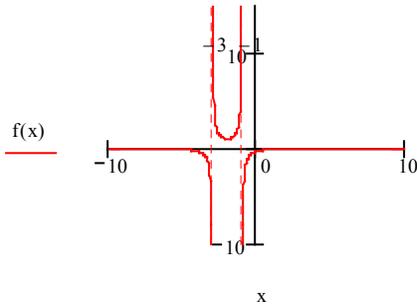


En este caso la gráfica tiene dos asíntotas en “ $x = 2$ y en $x = 3$ “, ya que siendo ahora el denominador es una cuadrática por lo que tiene dos raíces.

A medida que la x se aproxima a 2 o a 3 el cociente aumenta indefinidamente y la curva se aproxima a la recta asíntota.

- Obtenga las asíntotas verticales de la siguientes función:

$$f(x) := \frac{-1}{x^2 + 4x + 3}$$



En este caso la gráfica tiene dos asíntotas en “ $x = -1$ y en $x = -3$ “, ya que siendo ahora el denominador una cuadrática tiene dos raíces. A medida que la x se aproxima a -1 o a -3 el cociente aumenta indefinidamente y la curva se aproxima a la recta asíntota.

- EJERCICIOS:

Determine las asíntotas verticales de las siguientes funciones.

$$f(x) := \frac{1}{(x+2)^2}$$

$$f(x) := \frac{8}{x^2 + x + 1}$$

$$f(x) := \frac{3x - 6}{2x + 4}$$

- Asíntotas Horizontales.

Como su nombre lo indica, son rectas horizontales asociadas a la función. Se encuentran presentes únicamente en funciones racionales de la forma:

$$f(x) = g(x) / h(x)$$

y se determinan haciendo que la variable independiente “ x “, tienda al infinito lo que trae como consecuencia que la función cociente tienda a un valor determinado fijo, al que nunca va a llegar y mucho menos sobrepasar. Considérese el caso de una función racional cuyos términos son polinomios dada por:

$$f(x) = P(x) / Q(x)$$

Dependiendo de la relación entre los grados de los dos polinomios, tendremos los siguientes casos:

1. – El Polinomio P(x) del Numerador y Polinomio Q(x) del Denominador tienen el mismo grado
 - La asíntota horizontal es la recta dada por el cociente de los coeficientes de grado mayor.

Ejemplo.- Obtenga las asíntotas vertical(es) y horizontal(es) de la siguiente función.

$$f(x) := \frac{(4x + 1)}{x - 2}$$

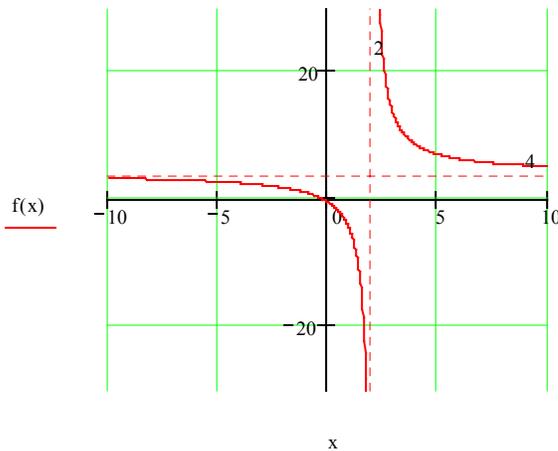
1.- La asíntota vertical se encuentra en el polo de la función que en este caso está en:

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Es decir, la recta $x = 2$ es la asíntota vertical.

$$f(x) := \frac{(4x + 1)}{x - 2}$$



La Asíntota horizontal se encuentra en el cociente de los términos de mayor exponente como ya se indicó. La recta $y = 4$ es la asíntota horizontal según mostramos en la figura anterior.

2. – El grado del Polinomio $Q(x)$ del Denominador es mayor que el grado del Polinomio $P(x)$ del Numerador.

En estos casos la asíntota es la recta $y = 0$, como veremos en el siguiente ejemplo.

Determine las asíntotas verticales y horizontales de la siguiente función.

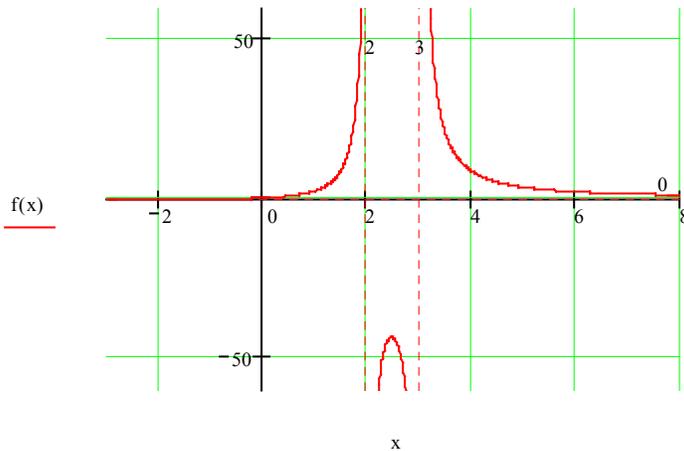
$$f(x) := \frac{4x + 1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\text{Polos} = x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0 \rightarrow x = 2 \text{ y } x = 3$$

Asíntotas verticales son las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

$$f(x) := \frac{(4x + 1)}{x^2 - 5x + 6}$$



3. – El grado del Polinomio $Q(x)$ del Denominador es menor que el grado del Polinomio $P(x)$ del Numerador.

En este caso no hay asíntota horizontal.

EJERCICIOS:

Determine las asíntotas Verticales y Horizontales de las siguientes funciones.

$$f(x) := \frac{x - 9}{x^2 + x + 1}$$

$$f(x) := \frac{2x + 1}{x^2 + 4x + 4}$$

$$f(x) := \frac{x - 4}{x^2 + 4x + 3}$$