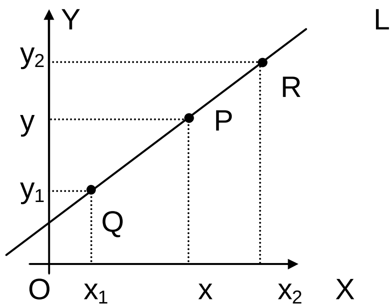
ECUACIONES DE LA RECTA EN EL PLANO CARTESIANO

Teorema: “A toda recta L del plano cartesiano está asociada al menos una ecuación de la forma: **ax + by + c = 0**, en donde a, b y c son números reales; $a \neq 0$ ó $b \neq 0$, y (x, y) representa un punto genérico de L”

Sean $Q(x_1, y_1)$ y $R(x_2, y_2)$, dos puntos distintos del plano cartesiano. Tomamos P(x, y) un punto genérico de la recta L. Como P, Q y R son colineales entonces: “x “ y “y” son variables, como vemos en la figura:



luego tenemos necesariamente: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

Desarrollando el determinante por la regla de Laplace, tenemos:

$$x \cdot \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underbrace{(y_1 - y_2)}_{a} \cdot x + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{b} \cdot y + \underbrace{(x_1 y_2 - x_2 y_1)}_{C} = 0$$

haciendo: $y_1 - y_2 = a$; $x_1 - x_2 = b$ y $x_1 y_2 - x_2 y_1 = c$, de donde todo punto P de L debe verificar la ecuación: **ax + by + c = 0;** llamada **Ecuación General de L.**

Consecuencias:
En la ecuación general de la recta L: ax + by + c = 0 tenemos que:

1. $a = 0 \Leftrightarrow y_1 - y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2 \Leftrightarrow$ L // X (recta L // al eje X).

2. $b = 0 \Leftrightarrow x_2 - x_1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_1 \Leftrightarrow$ L // Y (recta L // al eje Y)

3. $c = 0 \Leftrightarrow ax + by = 0 \Leftrightarrow (0, 0)$ satisface la ecuación, pues:

$$a{\cdot}0 + b{\cdot}0 = 0 \Leftrightarrow (0, 0) \in L.$$

Esto es cuando la ecuación no tiene término independiente la recta pasa por el origen.

INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS

Todo punto de intersección de dos rectas tiene que satisfacer las ecuaciones de ambas rectas. Por tanto, obtenemos el punto común $P(x_o, y_o)$ de las dos rectas concurrentes resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones:

$$\begin{cases} L_1: \ a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0 \\ L_2: \ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \ P = L_1 \cap L_2$$

Ejemplo:

Obtener la intersección de las rectas:

L_1 : $x - y + 1 = 0$

L_2 : $2x + y - 2 = 0$

Resolviendo el sistema se obtiene: $x = 1/3$; $y = 4/3$

Luego la intersección de las rectas L_1 y L_2 es el punto: $P = (x_o, y_o) = (1/3, 4/3)$

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS:

Dadas dos rectas L_1 y L_2 cuyas ecuaciones son:

$$(\Psi): \begin{cases} L_1: \ a_1x + b_1y = c_1 \\ L_2: \ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

ella pueden ocupar tres posiciones relativas en el plano cartesiano. Estas posiciones son definidas en base al número de “puntos comunes” de las rectas. Esto es:

L_1 y L_2 Son concurrentes $\Leftrightarrow$ tienen un único punto común.

L_1 y L_2 Son paralelas distintas $\Leftrightarrow$ no tienen ningún punto común.

L_1 y L_2 Son coincidentes $\Leftrightarrow$ tienen infinitos puntos comunes.

Nota: Con el símbolo $L_1 \cap L_2 = P$, indicaremos que L_1 y L_2 son concurrentes o secantes; con $L_1 \cap L_2 = \phi$ indicaremos que L_1 y L_2 son paralelas y distintas; con $L_1 = L_2$ indicaremos que L_1 y L_2 son coincidentes (o paralelas coincidentes).

Notemos que $L_1 // L_2$ significa $L_1 \cap L_2 = \phi$ ó $L_1 = L_2$.

Todo punto común a L_1 y L_2 es solución del sistema (Ψ). Resolviendo el sistema (Ψ) por el método de adición se tiene:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

multiplicando por b_2 la 1era Ecuación y $(-b_1)$ la 2da ecuación, tenemos:

$$\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ -a_2b_1x - b_1b_2y = -c_2b_1 \end{cases}$$
$$\overline{(a_1b_2 - a_2b_1)x = (c_1b_2 - c_2b_1)} \qquad (1)$$

ahora, multiplicando por ($-a_2$) la 1era ecuación y por a_1 la segunda ecuación se tiene:

$$\begin{cases} -a_1a_2x - b_1a_2y = -c_1a_2 \\ a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2 \end{cases}$$
$$\overline{(a_1b_2 - a_2b_1)x = (a_1c_2 - a_2c_1)} \qquad (2)$$

Haciendo:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D$$

$$c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = D_1$$

$$a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = D_2$$

Luego el sistema (Ψ) queda reducido a:

$$(\Psi) : \begin{cases} D \cdot x = D_1 & (3) \\ D \cdot y = D_2 & (4) \end{cases}.$$

De cuya discusión son posibles tres casos:

1er caso:

$D \neq 0 \Leftrightarrow (\Psi)$ tiene una única solución $\Leftrightarrow$ L_1 y L_2 son concurrentes.

2do caso:

$$\left.\begin{matrix} D = 0 \\ D_1 \ (\text{o } D_2) \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow (\Psi) \text{ no tiene solución } \Leftrightarrow L_1 \text{ y } L_2 \text{ son paralelas}$$

3er caso:

$$\left.\begin{matrix} D = 0 \\ D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow (\Psi) \text{ tiene infinitas soluciones } \Leftrightarrow L_1 \text{ y } L_2 \text{ son coincidentes.}$$

Cuando $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$, tenemos:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad ;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow c_1b_2 = c_2b_1 \Leftrightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_1 c_2 = a_2 c_1 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Podemos simplificar de la manera siguiente:

L_1 **x** $L_2 = P \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$; rectas secantes o concurrentes. (Sólo un punto común)

$L_1 \cap L_2 = \varphi \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$; rectas paralelas diferentes. (Ningún punto común)

$L_1 = L_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$; rectas coincidentes (paralelas). (Infinitos puntos comunes)

FORMAS DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA.

1. Forma General.

Anteriormente vimos que dada una recta L, podemos determinar por lo menos una ecuación del tipo:

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

a la que se le denomina **Ecuación General** de la recta L, la cual es **satisfecha** por todos los puntos P(x, y) pertenecientes a dicha recta L.

2. Forma reducida (pendiente-ordenada)

Dada la ecuación general de la recta L: $ax + by + c = 0$, si $b \neq 0$, se tiene:

$$by = -ax - c \Rightarrow y = \underbrace{(-\frac{a}{b})}_{m}x + \underbrace{(-\frac{c}{b})}_{q} \Rightarrow \boxed{.\ y = mx + b.}$$

Esta última ecuación que expresa "y" en función de "x" se denomina **Ecuación reducida de la recta L.** a "q" se le con el nombre de "**ordenada en el origen" o "coeficiente de posición".**

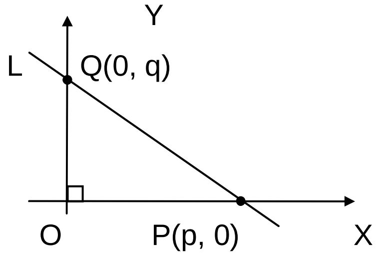
Ejemplo: Sea una recta L que pasa por A(0, 3) y B(–1, 0), cual es su ecuación reducida?.

Solución

Sabemos que: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \Rightarrow \underbrace{3x - y + 3 = 0}_{\text{Ec. General}} \Rightarrow \underbrace{y = 3x + 3}_{\text{Ec. Reducida}}$

3. Ecuación simétrica.

Consideremos una recta L que intercepta a los ejes cartesianos en los puntos Q(0, q) y P(p, 0), distintos.



La ecuación de esta recta es: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & q & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow qx + py - pq = 0 \Rightarrow qx + py = pq.$

De donde: $$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

a ésta se le conoce como: "**Ecuación simétrica de la recta" ó Abscisa - ordenada en el origen.**

4. Intersección con los ejes.

Consideremos una recta L de ecuación general: $ax + by + c = 0$, con $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$; los puntos P y Q, son puntos de intersección de la recta L con los ejes, a los cuales denotamos por: P(p, 0) y Q(0, q); ahora hallamos los valores de p y q en función de los coeficientes: a, b y c.

$P \in L \Rightarrow a \cdot p + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow p = \frac{-c}{a}$

$Q \in L \Rightarrow a \cdot 0 + b \cdot q + c = 0 \Rightarrow q = \frac{-c}{b}$

De donde es posible **obtener la ecuación simétrica a partir de la ecuación general** del modo siguiente:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow ax + by = -c \Rightarrow -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y = 1 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1 \Rightarrow \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Ejemplo

Obtener la ecuación simétrica de la recta L: $7x + 11y + 3 = 0$

Solución

$$7x + 11y = -3 \Rightarrow -\frac{7}{3}x - \frac{11}{3}y = 1 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{3}{7}} + \frac{y}{\frac{-3}{11}} = 1$$

5. Forma paramétrica de la recta.

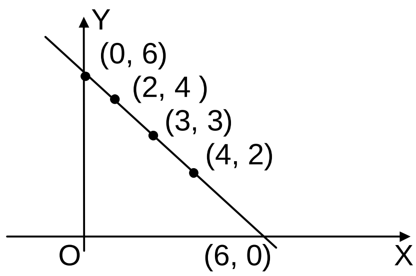
Las ecuaciones general, reducida y simétrica relacionan directamente entre si las coordenadas (x, y) de un punto genérico de la recta. Es posible, entre tanto, fijar la ley a ser cumplida por los puntos de la recta dando las coordenadas de x e y de cada punto de la recta en función de una tercera variable "t" , **llamada parámetro.**

Por ejemplo, si los puntos de una recta L, satisfacen "la ley": x = 3t + 4; y = 2 - 3t como es el gráfico de L , cual es su ecuación general?.

Un modo de solucionar estas cuestiones es construir una "tabla de valores" dando valores a "t", y calculando, para cada valor de t, las coordenadas de x e y de un punto de la recta:

t	**x**	**y**	**Punto**
2/3	6	0	(6, 0)
1	7	–1	(7, –1)
0	4	2	(4, 2)
–1/3	3	3	(3, 3)
–2/3	2	4	(2 , 4)
–4/3	0	6	(0, 6)

gráficamente tenemos:



colocados dos de esos puntos en el plano ya es posible diseñar la recta L. La ecuación general de la recta L puede ser obtenida tomando dos puntos y aplicar las condiciones de alineamiento. Por ejemplo usando los puntos (4, 2) y (3, 3) tenemos:

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - y + 6 = 0 \;\Rightarrow\; x + y - 6 = 0$. otro modo de obtener la ecuación general es "despejar" la variable t en cada una de las ecuaciones dadas e igualar las expresiones obtenidas, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3t + 4 \Rightarrow t = \dfrac{x-4}{3} \\ y = 2 - 3t \Rightarrow t = \dfrac{2-y}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x-4}{3} = \frac{2-y}{3}$$

entonces: $x - 4 = 2 - y$; de donde: $x + y - 6 = 0$.

Las ecuaciones que dan las coordenadas (x, y) de un punto cualquiera de la recta L en función de una tercera variable t :

$$\boxed{x = f_1(t) \quad ; \quad y = f_2(t)}$$

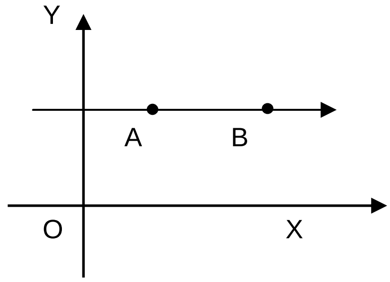
son llamadas ecuaciones paramétricas de la recta L.

Así las ecuaciones: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \end{cases}$ son ecuaciones paramétricas.

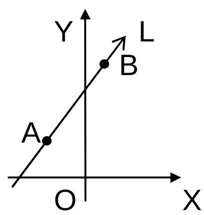
TEOREMA ANGULAR

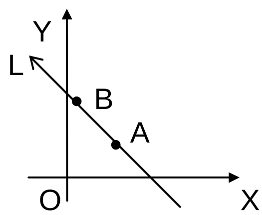
Fijemos en una recta L dos puntos distintos A y B.

Si $y_A = y_B$; L es paralela al eje X. En este caso adoptaremos como sentido positivo de la recta L al sentido positivo del eje X



Si $y_A \neq y_B$, entonces: $y_A > y_B$ ó $y_B > y_A$; en este caso, adoptaremos como sentido positivo de la recta L, aquel en que se parte del punto de menor ordenada (A ó B) y se llega al punto de mayor ordenada (B ó A respectivamente).

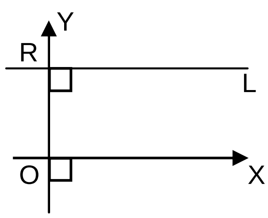




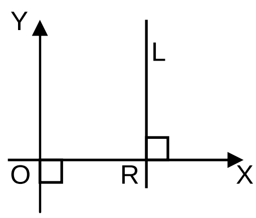
ANGULO DE INCLINACIÓN

Es el ángulo que una recta L forma con el eje X, (∢ LRX), en este caso definido:

- Si L // X, el ∢ LRO es nulo. Si L ⊥ X, el ∢ LRX es 90°.(∢ recto).

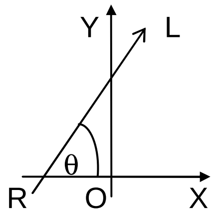


$\theta = 0°$

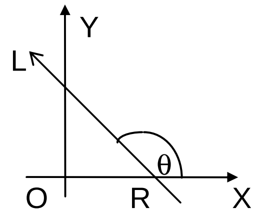


$\theta = 90°$

- Si L y X son secantes no perpendiculares, el ∢ LRX es el (agudo u obtuso) formado por las semirrectas RX, donde “R” es la intersección de la recta L con el eje X.



∢ LRX es agudo ($0 < \theta < 90°$)



∢ LRX es obtuso ($90 < \theta < 180°$)

Nota: el ángulo de inclinación, al que llamamos “θ” es tal que: $0° \leq \theta < 180°$.

PENDIENTE DE UNA RECTA

Es la tangente del ángulo de inclinación de la recta no perpendicular al eje de las abscisas. Llamada también coeficiente angular o declive de una recta; es decir:

$$\boxed{m = tg\ \theta}$$

son evidentes las siguientes:

PROPIEDADES:

1ra. Si el ∢ LRX es agudo, entonces la pendiente “m“ es positiva.

2da. Si el ∢ LRX es obtuso, entonces: la pendiente “m” es negativa.

3ra. Si el ∢ LRX es nulo, entonces: la pendiente “m” es nula (cero).

4ta. Si el ∢ LRX es recto, entonces: la pendiente “m“ no se define.

5ta. Dar la pendiente de una recta equivale a dar la dirección de la recta; así mismo cuando decimos que una recta L tiene una pendiente m = 1; La recta L forma con el eje OX un ángulo de 45°, por tanto, L es cualquier haz de paralelas de la figura (a); análogamente si la pendiente de L es m = –1, entonces el ∢LOX es obtuso y ∢LOX = 135°. Luego L puede ser cualquier recta de otro haz de paralelas; como la figura (b):

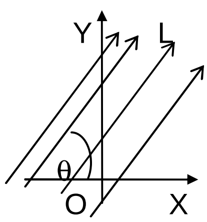


fig. (a)

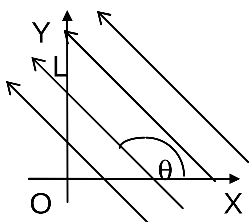


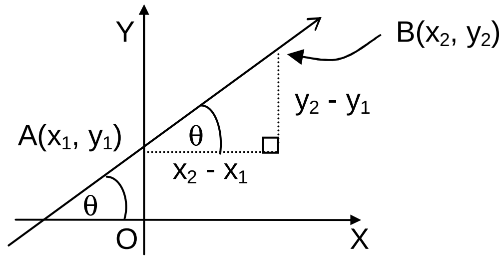
fig. (b)

Cálculo de la pendiente

Sólo es posible calcular el coeficiente angular de una recta cuando de ella se conoce:

1. Dos puntos distintos, ó
2. La ecuación general, ó
3. La dirección (por ejemplo, si se sabe que una recta es paralela a una recta dada). Desarrollamos cada punto:

1. Sean los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2 , y_2)$ de la figura,



De donde (por la definición de tangente en trigonometría):

$$\boxed{m = \operatorname{tg} \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

cualesquiera que sean los cuadrantes en que están situados A y B

2. Vamos a calcular la pendiente de una recta cuya ecuación general está dada por: $ax + by + C = 0$.

Recordemos que, dados $A(x_1, x_2)$ y $B(y_2, y_2)$ pertenecientes a una recta, la ecuación general esta dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Esto es:

$\underbrace{(y_1 - y_2)}_{a} \cdot x + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{b} \cdot y + \underbrace{(x_1 y_2 - x_2 y_1)}_{c} = 0$; como vimos, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, por tanto resulta:

$$\boxed{m = -\frac{a}{b} \quad ; \; b \neq 0}$$

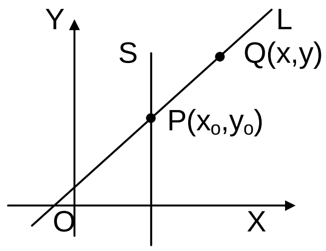
Así por ejemplo: La pendiente de la recta L: $\sqrt{3}x - 3y + c = 0$, es: $m = -\frac{a}{b} = -\frac{\sqrt{3}}{-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Notemos que el término independiente "c" no tiene influencia en el cálculo de la pendiente "m"; así por ejemplo las rectas: $\sqrt{3}x - 3y = -1$; $\sqrt{3}x - 3y + 500 = 0$ tienen la misma pendiente.

3. En la página 4, vimos que la ecuación reducida de una recta es: $y = mx + b$, por tanto, siempre que una recta tiene ecuación reducida (esto es $b \neq 0$), estamos expresando "y" en función de "x", donde el coeficiente de "x" es la pendiente m.

Ecuación de una recta que pasa por un punto dado.

Sea $P(x_o, y_o)$ un punto conocido. Si queremos obtener la ecuación de de una recta que entre otras propiedades, tiene la propiedad pasar por P, pueden ocurrir dos casos:



1. La recta L no es perpendicular al eje X, por tanto existe el coeficiente angular de L, que es: $m = \frac{y - y_o}{x - x_o}$; donde (x, y) representa un punto genérico Q, perteneciente a la recta L. En la ecuación anterior despejando se tiene:

$$\boxed{y - y_o = m(x - x_o) \qquad (1)}$$

A esta ecuación se le suele llamar: **Ecuación Punto-pendiente.**

2. La recta S es perpendicular al eje de abscisas, por tanto su ecuación es:

$$\boxed{x = x_o \qquad (2)}$$

CONDICIÓN DE PARALELISMO.

"Dos rectas L y L_1 son paralelas entre sí si y solamente si sus pendientes son iguales".

$$\boxed{L \parallel L_1 \Leftrightarrow m = m_1}$$

Observación:

Sabemos que dos rectas L: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$; L_1: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ son paralelas (distintas o no) si y solamente si se tiene:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

En los casos que las rectas no son verticales, probaremos que la condición de paralelismo: $D = 0$ y $m = m_1$ son equivalentes. Recordando que: $b_1 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$, tenemos:

$$D = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow m = m_1$$

En el caso en que $L \parallel L_1 \parallel OY$, solo vale la condición $D = 0$, pues no existen los coeficientes angulares m y m_1

Ejemplos:

1. Las rectas, L: $3x + 6y - 1 = 0$ y L_1: $2x + 4y + 7 = 0$, son paralelas pues:

$$\left\{\begin{array}{l} m = -\dfrac{a}{b} = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{2} \\ m_1 = -\dfrac{a_1}{b_1} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow m = m_1 \quad ;$$

y también: $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$

2. Las rectas, L: $500x - 1 = 0$ y L_1: $71x - 13 = 0$ son paralelas, pues:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 500 & 0 \\ 71 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$$

no obstante no esta definida las pendientes m y m_1 de las rectas dadas.

CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD.

Dos rectas L y L_1, no verticales, son perpendiculares entre sí, si y solamente si, el producto de sus coeficientes angulares (pendientes) es igual a " –1 "; así tenemos:

$$\boxed{L \perp L_1 \Leftrightarrow m \cdot m_1 = -1}$$

Observaciones:

1. Las rectas L: $x = 3$; y L_1: $y = -1$, son perpendiculares, puesto que L // Y; y L_1 // X. Notemos que en este último caso no vale la relación: $m \cdot m_1 = -1$, dado que L es vertical.

2. Existe la condición de perpendicularidad que vale también para el caso que una de las rectas sea vertical, **"Dos rectas L: $ax + by + c = 0$ y L_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, son perpendiculares si y solamente si: $a \cdot a_1 + b \cdot b_1 = 0$"** Así:

$$\boxed{L \perp L_1 \Leftrightarrow a \cdot a_1 + b \cdot b_1 = 0}$$

por ejemplo, las rectas, L: $x = 3$, y L_1: $= -1$, son perpendiculares, pues:

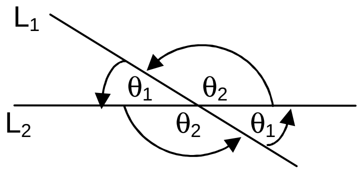
$$a \cdot a_1 + b \cdot b_1 = 1(0) + (0)1 = 0$$

ANGULO ENTRE DOS RECTAS

Dadas las rectas L_1 : $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y L_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$; vamos a calcular los ángulos que ellas determinan.

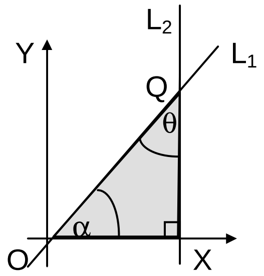
- Si $L_1 // L_2$ ó $L_1 \perp L_2$ el problema es inmediato. (dejamos de lado, este caso).
- Cuando dos rectas son concurrentes no perpendiculares, ellas determinan cuatro ángulos dos a dos opuestos por el vértice.

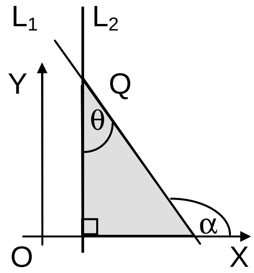
Así tenemos:



Calcularemos el ángulo agudo θ, formado por las rectas L_1 y L_2, respectivamente:

1er. Caso: La recta L_2 es vertical.





$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad\qquad \theta = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \qquad\qquad \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

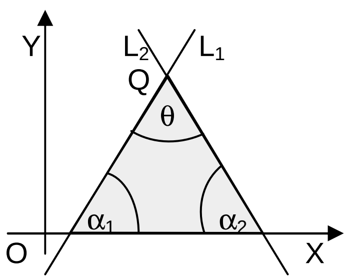
$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{cotg}\alpha \qquad\qquad \operatorname{tg}\theta = -\operatorname{cotg}\alpha$$

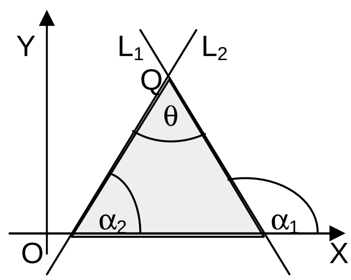
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{m_1} \qquad\qquad \operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{m_1}$$

Unificando estas dos posibilidades tenemos: $\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{1}{m_1}\right|$

Esto nos indica que: “Dadas las rectas: L_1 y L_2 si una de ellas no tiene coeficiente angular la tangente del ángulo L_1QL_2 es el módulo o valor absoluto de la inversa de la pendiente de la otra.

2do caso: Ninguna recta es vertical**.**





$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$

$\text{tg}\ \theta = \text{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{tg}\ \alpha_2 - \text{tg}\ \alpha_1}{1 + \text{tg}\ \alpha_2 \cdot \text{tg}\ \alpha_1};$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1};$$

$\theta = \alpha_1 - \alpha_2$

$\text{tg}\ \theta = \text{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{tg}\ \alpha_1 - \text{tg}\ \alpha_2}{1 + \text{tg}\ \alpha_2 \cdot \text{tg}\ \alpha_1}$$

$$\text{tg}\,\theta = -\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}$$

por tanto en cualquier situación, se tiene:

$$\boxed{\text{tg}\,\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right|}$$

Ejemplos:

1. Calcular el ángulo formado por las rectas, L_1: $3x - y + 5 = 0$; L_2: $2x + y + 3 = 0$.

Solución

$$\text{tg}\,\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right| = \left|\frac{3-(-2)}{1+3(-2)}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| = 1 \text{ ; de donde: } \theta = \frac{\pi}{4} = 45°$$

2. Calcular el ángulo formado por las rectas cuyas ecuaciones son, L_1: $2x+ + 3y -1 = 0$ y L_2: $6x -4y + 5 = 0$.

Solución

$$m_1 = -\frac{2}{3} \text{ y } m_2 = +\frac{3}{2} \Rightarrow m_1 m_2 = -1 \Rightarrow L_1 \perp L_2 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} = 90°$$

3. Calcular el ángulo agudo formado por las rectas L_1: $4x + 2y -1 = 0$; L_2: $3x - 4 = 0$.

Solución

Como:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = -\frac{4}{2} = -2 \\ \nexists\ m_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{tg}\theta = \left|\frac{1}{m_1}\right| = \left|\frac{1}{-2}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \text{arc tg}\,\frac{1}{2} = 26°33'54'' \text{ aprox.}$$

4. Calcular el ángulo formado por las rectas, L_1: $5x + 2y = 0$ y $L_2 = 10x + + 4y -7 = 0$.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = -\frac{5}{2} \\ m_2 = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow m_1 = m_2 \Rightarrow L_1 \,//\, L_2 \Rightarrow \theta = 0°$$

Observación:

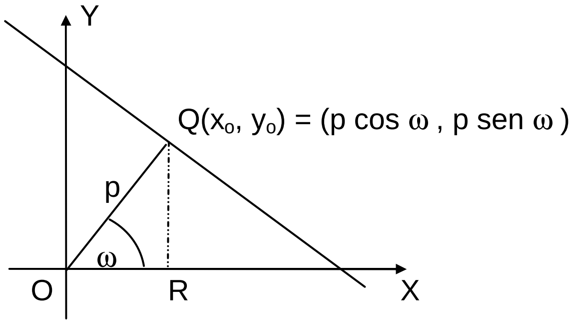
El ángulo agudo formado por las rectas L_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y L_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, es tal que:

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}\right| ; \quad (a_1a_2 + b_1b_2) \neq 0}$$

Está fórmula es válida sólo para calcular el ángulo agudo entre rectas que no son perpendiculares.

FORMA NORMAL DE LA ECUACION DE UNA RECTA.

Sea L una recta no horizontal que no pasa por el origen de coordenadas y sea Q el pie de la perpendicular trazada desde el origen de coordenadas a la recta L, tal como se muestra en la figura



Si "p" representa la longitud del segmento OQ, y ω es el ángulo positivo formado por el semieje positivo del eje X y el segmento orientado OQ ($0° \leq \omega < 360°$), entonces las coordenadas del punto Q son:

$x_o = p \cos \omega$

$y_o = p \operatorname{sen} \omega$

Como la recta L es perpendicular al segmento OQ, entonces la pendiente de L es:

$$m_L = -\frac{1}{\operatorname{tg}\ \omega} = -\frac{\cos\ \omega}{\operatorname{sen}\ \omega}$$

Como: $y - y_o = m(x - x_o)$ es la ecuación punto pendiente de la recta L, ahora ella expresada en términos de "p" y ω, se tiene:

$$y - p \cdot \operatorname{sen}\ \omega = -\frac{\cos\ \omega}{\operatorname{sen}\ \omega}(x - p \cdot \cos\ \omega)$$

efectuando operaciones y usando la identidad: sen 2ω + cos 2ω = 1, la ecuación se reduce a:

$$\boxed{L : x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p = 0, \ \ p > 0}$$

Esta es la llamada la **forma normal de la ecuación de la recta L.**

REDUCCION DE LA FORMA GENERAL A LA FORMA NORMAL.

La forma general de la ecuación de una recta es: $ax + by + c = 0$ (**1**)

y la forma normal: $x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p = 0,\ p > 0$ (**2**)

como las ecuaciones (1) y (2) representan a la misma recta, sus coeficientes deben ser proporcionales, así:

$$\cos \omega = ka \qquad (3)$$
$$\operatorname{sen} \omega = kb \qquad (4)$$
$$-p = kc \qquad (5)$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de (3) y (4), y sumando, obtenemos:

$$\cos^2 \omega + \operatorname{sen}^2 \omega = k^2(a^2 + b^2)$$

pero como: $\cos^2 \omega + \operatorname{sen}^2 \omega = 1$, esta última relación nos da:

$$k = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} \ ; \ a^2 + b^2 \neq 0 \qquad (6)$$

si se sustituye este valor de k en cada una de las ecuaciones (3), (4) y (5), obtenemos las relaciones buscadas entre los coeficientes, así:

$$\cos \omega = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \ ; \ \operatorname{sen} \omega = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \ ; \ p = -\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

y la recta definida por la forma general tiene por ecuación en la forma normal:

$$\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

De donde deducimos que: La forma general de la ecuación de una recta:

$$ax + by + c = 0, \qquad (1)$$

puede reducirse a la forma normal:

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p = 0, \qquad (2)$$

dividiendo cada término de (1) por:

$r = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$, en donde el signo que precede al radical “r” se escoge como sigue:

a) Si $c \neq 0$, “r” es de signo contrario a “c”.

b) Si $c = 0$ y $b \neq 0$, “r” y “b” tienen el mismo signo.

c) Si $c = b = 0$, “r” y “a” tienen el mismo signo.

Ejemplo:

La ecuación de una recta es, L: $5x - 7y - 11 = 0$, reducir su ecuación a la forma normal y hallar los valores de p y ω.

Solución

Para la ecuación dada se tiene: $a = 5$, $b = -7$ y $c = -11$.

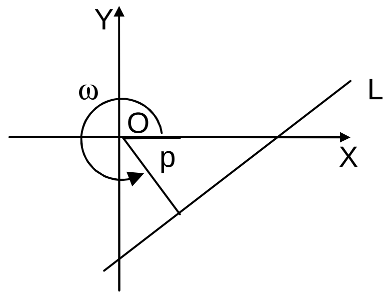
Por lo tanto:

$\pm\sqrt{a^2+b^2} = \pm\sqrt{5^2+(-7)^2} = \pm\sqrt{74}$

Como "c" es negativo damos al radical el signo positivo. Dividiendo la ecuación dada por: $\sqrt{74}$, obtenemos su forma normal: $\frac{5}{\sqrt{74}}x + \frac{-7}{\sqrt{74}}y - \frac{11}{\sqrt{74}} = 0$

en donde: $\cos\omega = \frac{5}{\sqrt{74}}$; $\operatorname{sen}\omega = -\frac{5}{\sqrt{74}}$ y $p = \frac{11}{\sqrt{74}}$

como cos $\omega > 0$ y sen $\omega < 0$; ω está en el cuarto cuadrante, tal como se muestra en la figura:



APLICACIONES DE LA FORMA NORMAL.

a) Cálculo de la distancia de una recta a un punto dado.

1. Distancia No dirigida

La distancia "d" de un punto $P_1 = (x_1, y_1)$ a una recta cuya ecuación esta dada por L: $ax + by + c = 0$; se obtiene mediante:

$$\boxed{d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (\mathbf{7})}$$

2. Distancia Dirigida

La distancia dirigida "d" de un punto $P_1 = (x_1, y_1)$ a una recta cuya ecuación es, L: $ax + by + c = 0$, se obtiene con:

$$\boxed{d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (\mathbf{8})}$$

donde el signo radical se elige de acuerdo a (siendo $r = \pm\sqrt{a^2+b^2}$) :

a) Si $c \neq 0$, "r" es de signo contrario a "c".

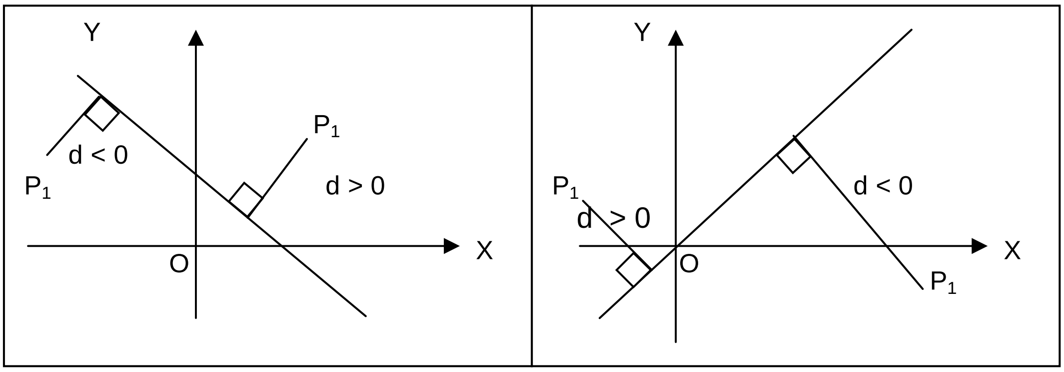
b) Si $c = 0$ y $b \neq 0$, "r" y "b" tienen el mismo signo.

c) Si $c = b = 0$, "r" y "a" tienen el mismo signo.

Además:

- Si la recta no pasa por el origen "d" es positiva o negativa según que el punto P_1 y el origen estén en lados opuestos o del mismo lado de la recta.
- Si la recta dada pasa por el origen "d" es positiva o negativa según que el punto P_1 esté arriba o abajo de la recta.

Así tenemos:



Observación:

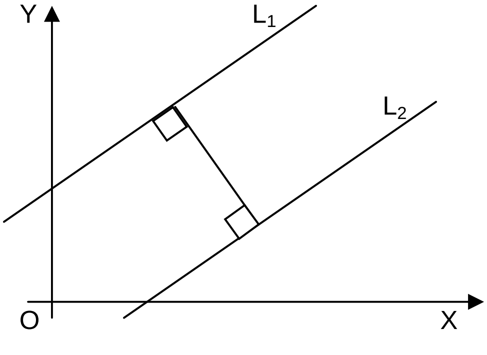
Si el punto $P_1(x_1\ ,\ y_1)$ pertenece a la recta L: $ax + by + c = 0$, entonces la distancia: $d = d(P_1, L) = 0$.

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS.

La distancia entre dos rectas paralelas, es la longitud del segmento perpendicular a ambas rectas. Esta longitud es igual a la distancia de un punto arbitrario P de una de las rectas a la otra.

La distancia entre las rectas paralelas: $L_1 : ax + by + c_1 = 0 \quad \wedge \quad L_2 : ax + by + c_2 = 0$ está dada por:

$$\boxed{d = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (\mathbf{9})}$$

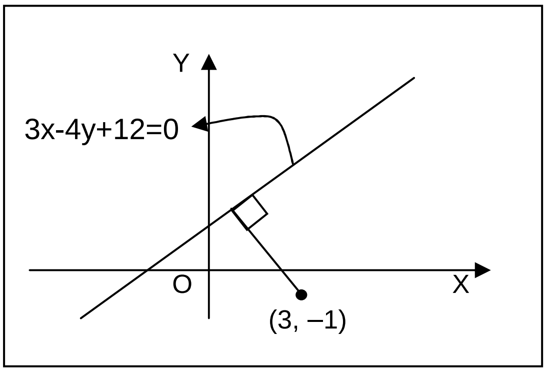


Ejemplos:

1. Hallar la distancia de la recta: 3x - 4y + 12 = 0 al punto (3, –1). Interpretar el signo de la distancia como segmento dirigido.

Solución

Consideremos la gráfica siguiente:



usando la expresión: $d = \dfrac{ax_1 + by_1 + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$

se tiene: $d = \dfrac{3(3) - 4(-1) + 12}{-\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{-26}{5}$.

Por tanto la distancia buscada es 26/5. El signo negativo nos indica que el punto y el origen están del mismo lado de la recta.

2. Hallar la distancia del punto P(–2, 5) a la recta L_1 de ecuación: 3x –4y – 9 = 0.

Solución

Usando la expresión: $d = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|3(-2) - 4(-5) - 9|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{|-35|}{5} = 7$

3. Hallar la distancia entre las rectas: L_1: 2x + 3y + 5 = 0; y L_2: 4x + 6y + 7 = 0

Solución

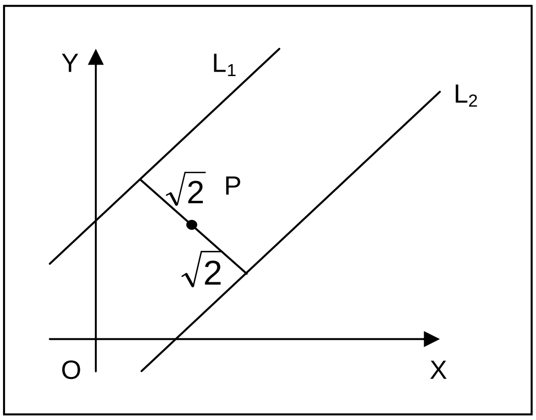
Con el propósito de aplicar la fórmula (9), multiplicamos la primera ecuación por 2, y tenemos: L_1: 4x + 6y + 10 = 0; por lo tanto: c_1 = 10; c_2 = 7, que sustituyendo en (9) se tiene: $d(L_1, L_2) = \dfrac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|7 - 10|}{\sqrt{4^2 + 6^2}} = \dfrac{3}{2\sqrt{13}}$

4. Determine las ecuaciones de las rectas que forman 45° con el eje X y están a una distancia de $\sqrt{2}$ unidades del punto P(3, 4).

Solución

Como el ángulo que forman las rectas valen 45°, se tiene que: $m_1 = +1 = -\dfrac{a}{b}$.

por tanto podemos tomar a = 1 y b = –1. Entonces la ecuación de L_1 es: x – y + c = 0



Como $d(P, L_1) = \sqrt{2}$. Entonces: $\frac{|1(3)+(-1)4+c|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{|-1+c|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

De donde: $|c - 1| = 2 \Rightarrow c - 1 = \pm 2$. Así $c = -1$ ó $c = 3$

Por lo tanto: $L_1 : x - y + 3 = 0$ ó $L_2 : x - y - 1 = 0$.

5. Calcular la altura del vértice A de un triángulo de vértices A(–3, 0), B(0, 0) y C(6, 8).

Solución

La ecuación de la recta BC esta dada por: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 6 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow L_{BC} : 4x - 3y = 0$

$d(A, L_{BC}) = \left|\frac{4(-3)-3(0)}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = \left|\frac{-12}{5}\right| = \frac{12}{5}$. Por tanto la altura mide 12/5.

b) BISECTRIZ DE UN ANGULO

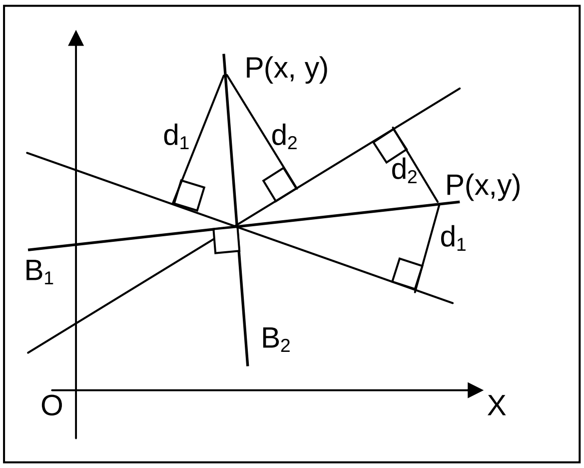
Las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por las rectas

$L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$; que se intersecan en un punto tiene por ecuaciones:

$$\boxed{\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}}$$

En la gráfica se tiene:

- B_1 y B_2 son bisectrices.
- P equidista de las rectas B_1 y B_2, es decir: $|d_1| = |d_2|$
- Para la bisectriz B_1, se tiene: $d_1 = -d_2$
- Para la bisectriz B_2, se tiene: $d_1 = d_2$



Ejemplos:

1. Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas:

L_1: $7x - y + 7 = 0$ $\wedge$ L_2: $x - y + 2 = 0$

Solución

De acuerdo a las ecuaciones de las bisectrices se tiene:

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \Rightarrow \frac{|7x - y + 7|}{\sqrt{7^2+(-1)^2}} = \frac{|x - y + 2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$

de donde: $|7x - y + 7| = 5|x - y + 2|$

Resolviendo se tiene:

$$7x - y + 7 = 5x - 5y + 10 \quad ó \quad 7x - y + 7 = -5x + 5y - 10$$

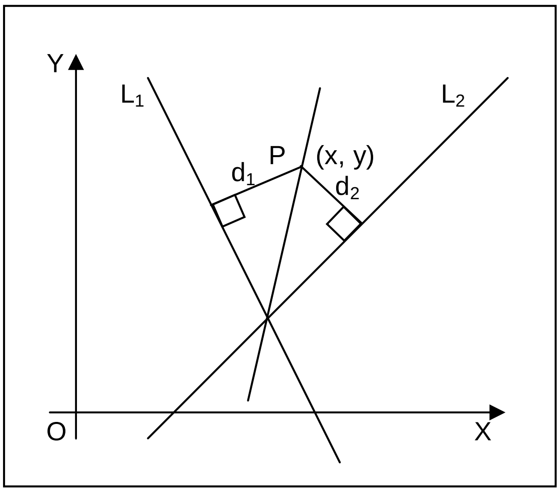
simplificando:

$$2x + 4y - 3 = 0 \;\; ó \;\; 12x - 6y + 17 = 0$$

2. Hallar la ecuación de la bisectriz del menor ángulo formado entre las rectas, $L_1 : 9x + 2y = 18$; $L_2 : 6x - 7y = 32$.

Solución

Consideremos la gráfica siguiente:



Siendo P = (x, y) un punto cualquiera sobre la bisectriz L y sean d_1 y d_2 las distancias dirigidas a los lados L_1 y L_2 respectivamente. En el gráfico se tiene: $d_1 = -d_2$. Es decir:

$$\frac{9x + 2y - 18}{81 + 4} = -\frac{6x - 7y - 32}{36 + 49}$$ de donde

L : $3x - y - 10 = 0$; ecuación pedida.

FAMILIA DE RECTAS.

“La totalidad de las rectas que satisfacen una única condición geométrica se llama **familia o haz de rectas”.**

Para una mejor comprensión sobre la familia de rectas, estudiaremos los casos siguientes:

1. Familia de rectas paralelas a una recta dada.

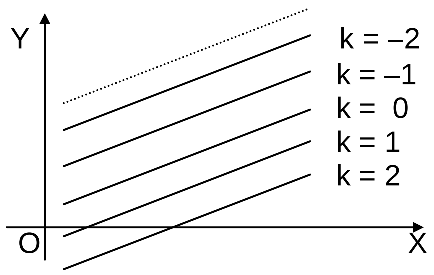
Un haz de paralelas está determinado cuando conocemos una de sus rectas (o su dirección).

a) Consideremos el haz de rectas paralelas determinado por la recta L de ecuación:

$$\boxed{L: \mathbf{ax + by + k = 0 \;\; ; \quad (k \in R)}}$$

Donde k es una constante arbitraria, llamado **parámetro de la familia.**

Así variando el valor de k, las rectas se “mueven” describiendo un haz de paralelas a la recta L; gráficamente:



b) Si “m” es un número real fijo, la ecuación:

$$\boxed{\mathbf{y = mx = k}}$$

representa un haz o familia de rectas de pendiente “m”. En este caso el parámetro “k” (constante arbitraria) representa a la ordenada en el origen.

Ejemplo:

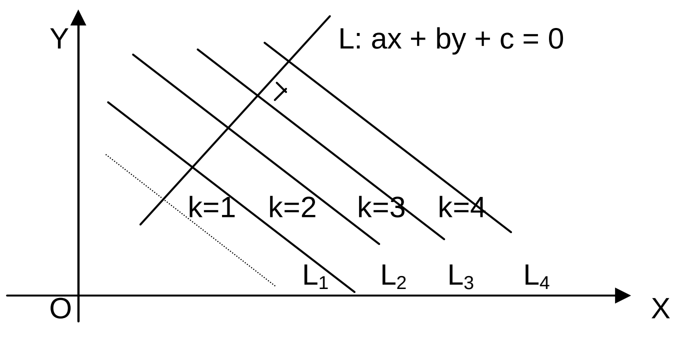
La ecuación del haz de rectas paralelas a la recta L: $3x + 4y - 2 = 0$ es la recta $L_1 : 3x + 4y + k = 0$ con $k \in \mathbb{R}$, pertenecen a este haz por ejemplo las rectas; L_2 : $3x + 4y + 1 = 0$; $L_3 : 3x + 4y - 5 = 0$

2. Familia de rectas perpendiculares a una recta dada.

Consideremos **L : ax + by + k = 0**; la recta dada, entonces la familia de rectas perpendiculares a la recta L, se expresa por la ecuación:

$$\boxed{\mathbf{L_1 : ax + by + k = 0}}$$

donde k es el parámetro. Gráficamente se tiene:



3. Familia de rectas que pasan por la intersección de dos rectas.

Supongamos que las ecuaciones de dos rectas que se cortan son:

$L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \wedge \quad L_2 : a_2x + b_2y + c2 = 0$ y sea $P_1(x_1, y_1)$ su punto de intersección. Por lo tanto la ecuación:

$$\boxed{\mathbf{a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0}}$$

representa todas las rectas que pasan por el punto $P_1(x_1, y_1)$; (en donde el parámetro k puede tomar todos los valores reales), con la única excepción de la recta L_2.

La importancia de esta ecuación está en que nos permite obtener la ecuación de una recta que pasa por la intersección de dos rectas dadas sin tener que buscar las coordenadas del punto de intersección.

Nota: El punto de intersección P_1, de las rectas L_1 y L_2; es llamado vértice de la familia.

Ejemplo:

La recta L, pasa por el punto R(–2, 3) y por la intersección de las rectas:

$L1 : x + 5y + 2 = 0 \quad \wedge \quad L2 : 3x + 4y – 5 = 0$. Hallar la ecuación de la recta L.

Solución

La familia de rectas que pasan por el punto de intersección de las rectas L1 y L2 es; $L : x + 5y + 2 + k(3x + 4y – 5) = 0$; como R(–2, 3) pertenece a L, entonces:

$–2 + 5(3) + 2 + k(3(–2) + 4(3) – 5) = 0$

$–2 + 15 + 2 + k(–6 + 12 –5) = 0$

$$k = –15$$

reemplazando se tiene:

$x + 5y + 2 – 15(3x + 4y – 5) = 0$

de donde: $L : 4x + 5y –7 = 0$

Querido Alumno:

Para ser feliz no importa lo que el mundo te ofrezca, sino lo que tu puedes ofrecer, porque todo lo que se da regresa, y ante los ojos del Señor solo valen las buenas obras.

Al final no te llevaras lo que has guardado, solo irá contigo lo que has hecho a favor de los demás; es decir lo que has dado.

Nunca te quejes, la vida no es fácil, camino sin piedra no es camino. No te compares con nadie, mídete contigo mismo; es la única manera segura de avanzar. ….

“Extracto de Mi Ultima Lección”

PROBLEMAS PROPUESTOS

“No pierdas tu tiempo dando explicaciones porque tus amigos no la necesitan y tus enemigos no te creerán”

Anónimo

61. Los extremos de un segmento son los puntos R(–2, –5) y S(4, 7). Calcular su pendiente.

a) –1 b) 2 c) –2 d) –3 e) N.A.

62. Los extremos de un segmento son los puntos P(–4, 6) y Q(8, –2). Determinar su ángulo de inclinación.

a) 120° b) 136° d) 33°40’ d) 146°20’ e) 56°20’

63. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto Q(4, –5) y tiene una inclinación de 64°.

a) y = 2.05x –13.2 b) y = 2.5x – 11 c) y = 1.96x –12.84 d) y = 2x – 11.5

64. Determinar la ecuación de la recta cuya pendiente es 0.75 y tiene por coeficiente de posición –2.

a) $y = 3/4\,x - 2$ b) $y = 3/4\,x + 2$ c) $y = -3/4\,x - 2$ d) $y = -3/4\,x + 2$

65. Cuál es la pendiente y el coeficiente de posición de la recta 3x + 5y = 15?.

a) 0.6 ; –3 b) –0.6 ; 3 c) –3 ; 3 d) –0.6 ; –5 e) 0.6 ; –5

66. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el origen y tiene una pendiente de 3/4.

a) y = 4/3 x b) y = 1.3x c) y = 3x d) y = 0.75x e) y = 4x

67. Determinar la ecuación general de la recta que pasa por el punto P(6, –3) y tiene una pendiente de –2.5.

a) 5x + 2y + 24 = 0 b) 5x + 2y = 24 c) 2x + 5y – 24 = 0
d) 2x + 5y = 24 e) 5x – 2y – 24 = 0

68. Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(–4, –1) y Q(2, 7).

a) 4x + 3y + 13 = 0 b) 4x – 3y = 13 c) 3x + 4y – 13 = 0
d) 3x + 4y = –13 e) 4x – 3y + 13 = 0

69. Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto P(5, 7) y es paralela a la recta que determinan los puntos A(–4, –1) y B(6, –2)?.

a) y = 0.2x + 8 b) y = –0.2x – 8 c) y = 2x – 16 d) y = 2x –8

70. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(5, 7) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos R(1, –1) y Q(6, –2).

a) y = 5x – 18 b) y = – 5x + 18 c) y = 3x –18
d) y = – 3x – 18 e) y = 2x + 15

71. Los extremos de un segmento son los puntos P(6, –3) y Q(2, 7). ¿En qué punto corta este segmento al eje de las X?.

a) (4, 0) b) (4.2 , 0) c) (4.8, 0) d) (6, 0) e) (2, 0)

72. Un segmento esta determinado por los puntos P(–3, 5) y Q(9, –3). Determinar la suma de las componentes de los puntos de intersección de este segmento con los ejes cartesianos.

a) 0 b) 3.5 c) 7.5 d) 9 e) 8

73. Los extremos de un segmento son los puntos A(–8, 12) y B(12, –3). ¿Cuánto mide el segmento determinado por los ejes?.

a) 10 b) $\sqrt{117}$ c) 6 d) 8 e) 9

74. Los extremos de un segmento son los puntos A(–8, 12) y B(12, –3). Calcular la razón en que los ejes coordenados dividen a este segmento.

a) 1: 2: 3 b) 2: 2: 3 c) 1: 3: 2 d) 1: 2: 2 e) 3: 2: 1

75. Determinar la intersección de la recta que pasa por los puntos P(1, 7) y Q(0, 4) con la recta que determinan los puntos A(7, 1) y B(10, 2).

a) (–2, –2) b) (–2, 2) c) (6, 6) d) (2, –2) e) (7, 1)

76. Hallar la ecuación de la recta cuya abscisa y ordenada en el origen son 5 y –3, respectivamente.

a) 3x – 5y = 15 b) 3y – 3y + 15 = 0 c) 3x + 5y = 15
d) 5x + 3y –15 = 0 e) 3y – 5x –15 = 0

77. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (–2, 3) y es perpendicular a la recta 2x –3y + 6 = 0.

a) –2x + 2y = 0 b) 3x = – 2y c) 2x = –3y
d) 3x = 2y e) –2/3x = –3/2y

78. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos (7, 4) y (–1, –2).

a) 4x + 3y = –15 b) 4x + 3y = 15 c) 3x + 4y = –15
d) 4x – 3y = –15 e) 3x + 4y = 15

79. Hallar el valor del parámetro k de forma que:

1. 3kx + 5y + k –2 = 0 pase por el punto (–1, 4).

2. 4x –ky –7 = 0, tenga pendiente 3
3. kx – y = 3k – 6, tenga de abscisa en el origen 5.

a) 9 , $-4/3$, 3 b) –9, $-4/3$, 3 c) 9 , $4/3$, –3
d) 9, $-4/3$, –3 e) 9 , $4/3$, 3

80. Hallar las ecuaciones de las rectas de pendiente –3/4 que formen con los ejes un triángulo de área de 24 unidades de superficie.

a) 3x – 4y –24 = 0 ; 3x – 4y + 24 = 0
b) 3x + 4y +24 = 0 ; 3x – 4y – 24 = 0
c) 3x + 4y +24 = 0 ; 3x + 4y + 24 = 0
d) 3x + 4y –24 = 0 ; 3x + 4y + 24 = 0
e) 3x – 4y –24 = 0 ; 3x – 4y – 24 = 0

81. Hallas las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (4, –2) y distan 2 unidades del origen.

a) 4x – 3y – 10 = 0 ; 3y + 2x + 1 = 0
b) –4x + 3y + 10 = 0 ; y – 2 = 0
c) –4x + 3y + 10 = 0 ; 2y + 2 = 0
d) 4x + 3y – 10 = 0 ; y + 2 = 0
e) 4x + 3y – 10 = 0 ; y – 2x = 0

82. Hallar una de las ecuaciones de las paralelas a la recta: 12x – 5y –15 = 0 que disten de ella 4 unidades.

a) 12x + 5y – 67 = 0 b) 12x + 5y + 37 = 0 c) 12x + 5y + 67 = 0
d) 12x – 5y – 37 = 0

83. Hallar el mayor valor de “k” para que la distancia “d” de la recta L : 8x + 15y + k = 0, al punto (2, 3) sea igual a 5 unidades.

a) –146 b) 24 c) 36 d) 17 e) 146

84. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 3) y cuya abscisa en el origen es el doble que la ordenada en el origen.

a) x + 2y – 8 = 0 b) x + 2y + 6 = 0 c) x – 2y – 8 = 0
d) x + 2y – 6 = 0 e) 2x + 4y – 14 = 0

85. Hallar el valor del parámetro k, en la ecuación 2x + 3y + k = 0 de forma que la recta forme con los ejes de coordenadas un triángulo de 27 unidades de superficie.

a) ± 12 b) ± 8 c) ± 10 d) ± 36 e) ± 18

86. Hallar el valor del parámetro “k” para que la recta de ecuación 2x + 3ky –13 = 0 pase por el punto (–2, 4).

a) $17/12$ b) $-12/17$ c) $12/7$ d) $-17/12$ e) 2/7

87. Hallar el valor de "k" para que la recta de ecuación: $3x - ky - 8 = 0$ forme un ángulo de 45° con la recta: $2x + 5y - 17 = 0$

a) 7; $-9/7$ b) –7; $9/7$ c) 4 ; $9/7$ d) –4; $9/7$ e) 4; 7

88. Hallar un punto de la recta L_1 : $3x + y + 4 = 0$, que equidista de los puntos (–5, 6) y (3, 2).

a) (2, –2) b) (–4, 4) c) (–2, 2) d) (4, –4) e) (1, –4)

89. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (–1, 6) y cuyo producto de coordenadas en el origen es 1.

a) $9x + y - 3 = 0 \quad \wedge \quad 4x - y + 2 = 0$
b) $4x + y + 3 = 0 \quad \wedge \quad 4x + y - 2 = 0$
c) $9x + y - 3 = 0 \quad \wedge \quad 4x + y + 2 = 0$
d) $3x + y + 3 = 0 \quad \wedge \quad 9x - y + 2 = 0$
e) $4x + y - 3 = 0 \quad \wedge \quad 9x + y + 2 = 0$

90. Hallar la ecuación de la recta de abscisa en el origen –3/7 y que es perpendicular a la recta $3x + 4y = 10$

a) $21x - 28y + 12 = 0$ b) $28x - 21y + 12 = 0$ c) $28x - 21y - 12 = 0$
d) $28x + 21y + 12 = 0$ e) $14x + 21y - 12 = 0$

91. Hallar la ecuación de la perpendicular a la recta: $2x + 7y - 3 = 0$ en su punto de intersección con la recta: $3x - 2y + 8 = 0$.

a) $2x - 7y + 16 = 0$ b) $3x - 2y + 8 = 0$ c) $7x - 2y - 16 = 0$
d) $7x - 2y + 16 = 0$ e) $2x - 3y + 8 = 0$

92. Hallar la distancia del punto de intersección de las rectas: $3x - 4y - 29 = 0$ y $2x + 5y + 19 = 0$, al punto P(–1, –2).

a) 3 b) 5 c) 12 d) 8 e) –2

93. Dada la recta L : $7x + 3y + \sqrt{117} = 0$, obtener la ecuación de la familia de rectas paralelas a L.
a) $7x + 3y + k = 0$; $\forall\ k \in \mathbb{R}$. b) $7x + 3y = 0$ c) $7x + 3y + k = 0$; $\forall\ k \in \mathbb{N}$.
d) $7x + 3y - k = 0$ $\forall\ k \notin \mathbb{R}$.. e) $7x + 3y - k \neq 0$ $\forall\ k \in \mathbb{R}$.

94. Determine la recta de la familia: $k_1(x - 2y + 3) + k_2(2x + y - 2) = 0$ que es paralela a la recta L_1 : $7x + y + 4 = 0$.

a) $7x - y - 3 = 0$ b) $7x + y + 3 = 0$ c) $7x + y - 3 = 0$
d) $7x - y + 3 = 0$ e) $3x - y - 3 = 0$

95. Que figura constituyen los puntos del plano XY cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $\text{sen}(x - y) = 0$.

a) Un cuadrado b) Un paralelogramo c) Un trapecio
d) Un punto e) Una familia de rectas paralelas

96. Los puntos del plano cartesiano XY cuyas coordenadas satisfacen la ecuación: tg x = tg y, constituyen una:

a) Familia de rectas que se cortan en un punto.
b) Familia de rectas perpendiculares
c) Familia de rectas paralelas al eje de las abscisas.
d) Familia de rectas paralelas al eje de las ordenadas.
e) Familia de rectas paralelas.

97. Determinar la pendiente de la ecuación del haz de rectas que pasan por el punto (–3, 7).

a) $m \in \mathbb{R}$ b) $m \neq 0$ c) –3/7 d) –7/3 e) 3/ 7

98. Hallar las rectas que pertenecen a la familia de rectas: $2x + 3y + 6 + k(x - 5y - 6) = 0$ y son perpendiculares a las rectas bases de la familia.

a) $3x + 2y = 0$; $5x - y + 6 = 0$
b) $3x - 2y = 0$; $5x + y + 6 = 0$
c) $3x + 2y = 0$; $5x + y - 6 = 0$
d) $2x - 3y = 0$; $5x - y - 6 = 0$
e) $2x - 3y = 0$; $5x + y + 6 = 0$

99. Dada la ecuación de la familia de rectas: $x + y + 8 + k(x - y + 4) = 0$, determinar el valor de “c”, para que la recta: $2x - 3y + c = 0$ pertenezca a esta familia.

a) 3 b) 6 c) –2 d) 2 e) 5

100. Hallar el centro del haz de rectas dado por la ecuación: $\alpha(2x + 3y - 1) + \beta(x - 2y - 4) = 0$

a) (2, 1) b) (1, –2) c) (1, 2) d) (2, –1) e) (1, –1)

101. Dada la ecuación de un haz de rectas: $\alpha(3x + 2y - 9) + \beta(2x + 5y + 5) = 0$; determinar el valor de “c” para que la recta: $4x - 3y + C = 0$, pertenezca a este haz.

a) 29 b) 12 c) –12 d) –29 e) 27

102. Dada la ecuación de un haz de rectas: $\alpha(5x + 3y - 7) + \beta(3x + 10y + 4) = 0$ determinar para que valores de “a” la recta: $ax + 5y + 9 = 0$ no pertenece a este haz.

a) $a \neq -2$ b) $a \neq 2$ c) $a \neq -3$ d) $a \neq 5$ e) $a \neq -9$

103. Hallar la proyección del punto P(–6, 4) sobre la recta: $4x - 5y = -3$.

a) (2, –1) b) (1, –2) c) (–2, –1) d) (3, –2) e) (–3, 2)

104. Hallar la ecuación d la recta, si el punto P(2, 3) es la base de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a esta recta.

a) $2x - 3y - 3 = 0$ b) $x + y + 3 = 0$ c) $2x + 3y - 13 = 0$
d) $2x - y + 1 = 0$ e) $3x - 2y + 13 = 0$

105. Hallar la proyección del punto P(–8, 12) sobre la recta que pasa por los puntos A(2, –3) y B(–5, 1).

a) (–12, 5) b) (–5, –12) c) (5, 12) d) (–5, 12) e) (2, –5)

106. Hallar un punto M simétrico al punto N(8, –9), relativo a la recta que pasa por los puntos A(3, –4) y B(–1, –2)

a) (–10, 5) b) (10, –5) c) (10, 5) d) (–8, –3) e) (3, 5)

107. Hallar en el eje de abscisas, un punto P de manera que la suma de sus distancias a los puntos M(1, 2) y N(3, 4) sea mínima.

a) $(-5/3\,,\,0)$ b) $(5/3\,,\,0)$ c) (1, 0) d) $(0,\,-5/3)$ e) $(-5/3\,,\,5/3)$

108. Hallar en el eje de ordenadas, un punto P de manera que la diferencia de sus distancias a los puntos M(–3, 2) y N(2, 5) sea máxima.

a) (0, 5) b) (0,12) c) (0, 11) d) (0, 0) e) (11, 12)

109. Hallar en la recta 2x – y – 5 = 0, un punto P de manera que la suma de sus distancias a los puntos A(–7, 1); B(–5, 5) sea mínima.

a) (–2, 1) b) (1, –3) c) (3, –1) d) (2, –1) e) (4, 3)

110. Hallar en la recta 3x –y –1 = 0 un punto P de manera que la diferencia de sus distancias a los puntos A(4, 1) y B(0, 4) sea máxima.

a) (1, –2) b) (4, 11) c) (3, 8) d) (0, –1) e) (2, 5)

111. Una compañía tiene una función de costo de: y = 500x + 4025 y una función de ingresos de: y = 675x. ¿Cuántas unidades debe fabricar para que no haya perdidas ni ganancias?.

a) 12 b) No se puede saber c) mas de 23
d) menos de 10 e) 23

112. Las ecuaciones de L_1: Ax + By = 5 y L_2: Bx – Ay = 2, (A y B no son simultáneamente iguales a cero) corresponden a:

a) Rectas Paralelas diferentes b) Rectas Paralelas coincidentes
c) Rectas alabeadas d) Rectas perpendiculares
e) Dos rectas secantes cualesquiera

113. El alquiler de un auto cuesta 20 soles por día y 7 centavos el kilómetro. Supóngase que se alquila el auto por un sólo día; escríbase una fórmula para los cargos de alquiler en términos de la distancia recorrida.

a) y = 20 + 7x b) y = 20 + 0.7x c) y = 20 + 0.07x
d) y = 7 + 20x e) y = 20(24) + 0.07x

114. En investigación de mercado, una curva de demanda relaciona la demanda (x unidades) de un producto con el precio (y dólares) por unidad que el mercado está dispuesto a pagar. **Una curva de oferta** refleja el número de unidades que un fabricante está dispuesto a surtir a un precio dado. Las **curvas de demanda** tienen pendientes negativas, mientras que las curvas de oferta tienen pendientes positivas. Para cierto producto, se encuentra que la curva de demanda está dada por $y = 80 - 3x$, mientras que la curva de oferta está dada por $y = 20 + 2x$. Hállese el punto de equilibrio de mercado para el producto.

a) 20 unidades a $ 54 c/u. b) 12 unidades a $ 44 c/u.
c) 18 unidades a $ 44 c/u. d) 44 unidades a $ 12 c/u.

115. Cuál de los puntos dados, A(3, –5), B(–4, 1) y C(9, 0) dista menos de la recta L_1 : $5x = 12y + 26$?.

a) C b) A c) B d) A y B e) No se puede saber.

116. Determinar la ecuación de la recta que pasas por el punto de intersección de las rectas: $L_1 : 3x - 5y - 22 = 0 \wedge L_2 : 6x + 7y - 10 = 0$; y forma un ángulo de 135° con el eje de las X.

a) $y + x - 2 = 0$ b) $y = x + 2$ c) $y = 2x - 3$ d) $2y = 2 - x$

117. ¿En que punto concurren las rectas:

$L_1 : 3x + 7y - 11 = 0 \wedge L_2 : 5x + 3y + 25 = 0 \wedge L_3 : x - 2y + 18 = 0$

a) (5, 2) b) (–8, 5) c) (–3, 4) d) (5, –8) e) (2, 5)

118. Dos rectas al cortarse forman un ángulo cuyo vértice es el punto P(–2, 8). Si la ecuación de una de las bisectrices es $L_1 : x + y - 6 = 0$, ¿Cuál es la bisectriz del otro ángulo que forman las rectas?

a) $x + y = -10$ b) $y = x - 10$ c) $y = x + 10$
d) $y = x + 6$ e) $y = x$

119. Determinar la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo que forman al cortarse las rectas $L_1 : x + 3y - 2 = 0$ y $L_2 : x - 3y + 10 = 0$.

a) $y = x + 1$ b) $y = -x$ c) $y = x$
d) $y = 2$ e) $y = x + 2$

120. Determinar una de las ecuaciones de las bisectriz del ángulo que forman las rectas que pasan por los puntos A(7, 1); B(10, 2) y C(1, 7) ; D(0, 4) respectivamente.

a) $y = 2x + 1$ b) $y = 2x$ c) $y = -x$
d) $y = 2 - x$ e) $y = x$

121. Hallar el punto de intersección del incentro del triángulo formado por las rectas L_1 : $4x - 3y - 65 = 0$; L_2: $7x - 24y + 55 = 0$; y $L_3 : 3x + 4y - 5 = 0$.

a) (10, 0) b) (8, 0) c) (3, –1) d) (0, 10) e) (2, 3)

122. Hallar la ecuación de la recta, si el punto P(2, 3) es la base de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a esta recta.

a) $2x + 3y = 13$ b) $2x - 3y = 13$ c) $3x + 2y = 13$
d) $3x - 2y = 13$ e) $2x + 3y = -13$

123. Los lados de un triángulo se dan por sus ecuaciones $4x - y - 7 = 0$; $x + 3y - 31 = 0$; $x + 5y - 7 = 0$. Hallar el punto de intersección de sus alturas.

a) (3, 4) b) (–3, 4) c) (4, 3) d) (4, –3) e) (–3, –4)

124. Dados los vértices de un triángulo A(1, –1); B(–2, 1) y C(3, 5), hallar la ecuación de la perpendicular bajada desde el "vértice A" a la mediana trazada desde el "vértice B".

a) $4x + y = 3$ b) $4x + y = -3$ c) $4x - y = 3$
d) $4x - y = -3$ e) $x + 4y = 3$

125. Se dan las ecuaciones de dos la-dos de un rectángulo: $5x + 2y - 7 = 0$; $5x + 2y - 36 = 0$, y la ecuación de una de las diagonales: $3x + 7y - 10 = 0$. Hallar la ecuación de la otra diagonal.

a) $7x - 3y - 33 = 0$ b) $7x + 3y = 33$ c) $7x - 3y + 33 = 0$
d) $7x + 3y = -33$ e) $3x - 7y - 33 = 0$

126. Dados dos vértices de un triángulo A(–10, 2) y B(6, 4); cuyas alturas se cortan en el punto N(5, 2) determinar las coordenadas del tercer vértice C.

a) (–6, 6) b) (6, –6) c) (3, –3) d) (–4, 3) e) (3, 6)

127. La ecuación de la recta que pasa por el punto $M(x_1, y_1)$ y es paralela a la recta $Ax + By + C = 0$ puede escribirse de la forma:

a) $B(x - x_1) + A(y - y_1) = 0$ b) $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$
c) $A(x - x_1) - B(y - y_1) = 0$ d) $B(x - x_1) - B(y - y_1) = 0$
e) $A(y - y_1) + B(x - x_1) = 0$

128. Determine la ecuación de la recta L_1 que contiene al punto P(–5, 4) y es paralela a la recta L cuyas ecuaciones paramétricas son: $x = 3t$; $y = 2 - 5t$.

a) $5x + 3y - 13 = 0$ b) $5x + y = 13$ c) $5x - 3y - 13 = 0$
d) $x + 5y = 13$ e) $5x + 3y + 13 = 0$

129. Determinar la ecuación de la recta L que pasa por el punto de intersección de las rectas L_1 y L_2 y es paralela a la recta L_3, sabiendo que: $L_1 : \frac{x}{-1} + \frac{y}{-1} = 1$; L_2 : $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2 + 3t \end{cases}$; y $L_3 : 2x - y - 4 = 0$

a) $3x - 2y + 7 = 0$ b) $2x + 3y - 7 = 0$ c) $3x + 2y + 7 = 0$
d) $2x - 3y + 7 = 0$ e) $3x - 2y - 7 = 0$

130. Los puntos M, N, P y Q son los vértices de un paralelogramo situado en el primer cuadrante. Siendo M(3, 5); N(1, 2) y P(5, 1) determine el vértice Q del paralelogramo.

a) (4, 7) b) (3, 4) c) (7, 4)
d) (1, 3) e) N.A.

131. Dos lados de un paralelogramo ABCD están contenidos en las rectas L_1: 2x + y – 3 = 0; y L_2 : x + y – 2 = 0. Si se sabe que el vértice A(–3, 4) determinar los vértices B, C y D.

a) B(–2, 1) ; C(–1, 1) ; D(4, 6)
b) B(2, –1) ; C(1, –1) ; D(–4, –6)
c) B(2, –1) ; C(1, 1) ; D(–4, 6)
d) B(–2, –1) ; C(–1, 1) ; D(4, 6)
e) B(–2, 1) ; C(–1, 1) ; D(–4, 6)

132. Obtener una recta perpendicular a L_1 : 4x + 3y = 0, y que defina con los ejes coordenados un triángulo de $6u^2$ de área.

a) $L_1 : 3x - 4y \pm 12 = 0$
b) $L_1 : 3x + 4y \pm 12 = 0$
c) $L_1 : -4x - 3y \pm 12 = 0$
d) $L_1 : -3x + 4y = 0$
e) N. A.

133. Cuál es la tangente del ángulo formado por las rectas L_1 : 3x + 2y + 2 = 0 y L_1 : –x + 2y + 5 = 0.

a) 6 b) –4 c) –2 d) 8 e) N.A.

134. Dados los puntos A(4, –1); B(2, –1) y C($5+\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$); cuánto mide el menor de los ángulos internos del triángulo ABC?.

a) $\pi/12$ b) $3\pi/4$ c) $\pi/6$ d) $\pi/4$ e) N.A.

135. Determinar la recta L_2, simétrica de la recta L : x –y + 1 = 0 en relación a la recta L_1 : 2x + y + 4 = 0.

a) L_2 : x – 7y + 3 = 0
b) L_2 : x + 7y – 3 = 0
c) L_2 : x – 3y – 7 = 0
d) L_2 : 3x + y + 3 = 0
e) x – 7y = 3

136. Calcular el área del triángulo ABC cuyos vértices son A(a + 1, a + 2) ; B(a, a – 1) y C(a + 2, a)

a) $5/3$ b) $5a/3$ c) $5a/2$ d) $5/2$ e) N.A.

137. Calcular el área del triángulo ABC, determinado por las rectas, L : y = x, L_1 : x = 4 ; L_2 : x + y –2 = 0

a) 5 b) $5/2$ c) 9 d) $9/2$ e) N. A.

138. Un segmento AB se apoya sobre el eje de coordenadas de modo que A está sobre el eje X y B está sobre el eje Y. Si el punto P(3, –1) pertenece al segmento AB y se cumple que PA + 2PB = 0, hallar la ecuación de la recta L que contiene a AB.

a) L : x + 6y + 9 = 0
b) L : x – 6y + 9 = 0
c) L : x + 6y – 9 = 0
d) L : x – 6y – 9 = 0
e) N. A

139. Un vértice de un cuadrado PQRS es el punto P(2, 3) y una de sus diagonales está sobre la recta: L_1 : 3x + 4y – 8 = 0. Hallar el área del cuadrado

a) 8 b) 6 c) 12 d) 14 e) N. A.

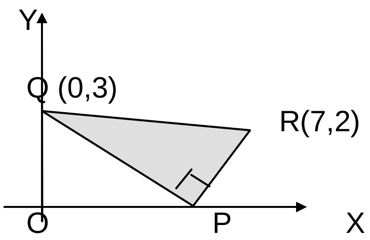
140. Calcular el área del cuadrilátero convexo ABCD sabiendo que A(0, 0); B(4, –2) ; C(6, 8) ; D(0, 4).

a) 12 b) 9 c) 18 d) 24 e) N. A.

141. Condorito se encuentra en el punto A(–7, 1) y debe llegar al punto B(–5, 5) pasando por la orilla del río para sacar agua. Si la orilla del río se encuentra sobre la recta L: 2x – y – 5 = 0. Hallar el punto P en la orilla del río de manera que Condorito recorra la menor distancia.

a) P(2, –2) b) P(2, –1) c) P(3, –1) d) P(–2, 1) e) N.A.

142 Hallar las coordenadas del punto P; en la gráfica siguiente.

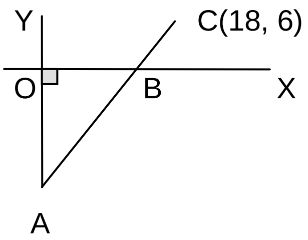


a) (0, 0) b) (1, 0) c) 5, 0) d) 7, 0) e) existen dos soluciones

143. La base de un triángulo isósceles ABC son los puntos A(1,5) y C(–3, 1) sabiendo que el vértice B pertenece al eje “X”, hallar el área del triángulo isósceles ABC.

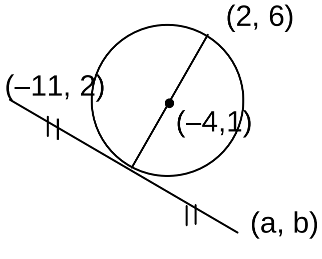
a) $10u^2$ b) $11u^2$ c) $12u^2$ d) $13u^2$ e) $24u^2$

144. En la figura hallar el área del triángulo AOB. Si: $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$



a) $6.4u^2$ b) $3.2u^2$ c) $6\ u^2$ d) $3\ u^2$ e) $2\ u^2$

145. En la figura determinar: a + b



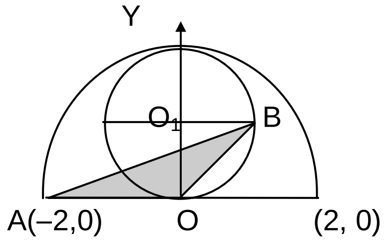
a) 19 b) –19 c) –14 d) –18 e) –10

146. Los puntos P(5, 4); Q(5, –2) y R(–3, –2) son los vértices de un triángulo. Determinar el área de la superficie triangular que se forma al unir los puntos medios de los lados RP; PQ y QR.

a) $24u^2$ b) $25u^2$ c) $6u^2$ d) $8u^2$ e) $10u^2$

147. En la figura siguiente calcular el área del triángulo ABO

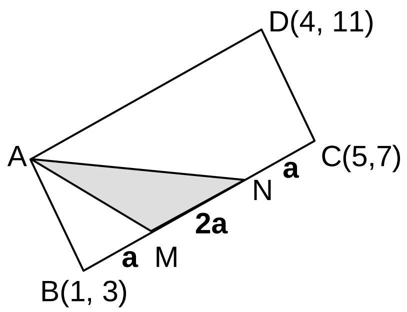
a) $2u^2$
b) $1u^2$
c) $0.5u^2$
d) $3u^2$
e) $1.5u^2$



148. Hallar el valor de “k” de tal manera que la recta y = 3x + k, forme con la recta $y = 5/4\,(x+1)$; y el eje positivo Y un triángulo de área igual a $5/4$.

a) 1 b) 5 c) 2 d) 3 e) 4

149. Calcular el área del triángulo AMN, si ABCD es un paralelogramo.



a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

150. Los vértices de un triángulo ABC, son A = (–2, 1); B(4, 7) y C(6, –3). Calcular el área de la región triangular AQC, siendo “Q” el circuncentro de dicho triángulo.

a) $40/3$ b) $10/3$ c) $20/3$ d) 10 e) 5 .

Maestro:
Ayer que no teníamos nada,
y trabajábamos igual,
me dijiste: “somos familia”.

Hoy que tengo menos y
trabajo más no me dices
que seamos familia.

Maestro, entonces:
Mañana que no tendré nada, y
tu disfrutarás de mi trabajo,
me dirás: ¿”nunca fuimos familia”? .

Maestro por qué entonces, ... ?

27/04/96 Neblinka