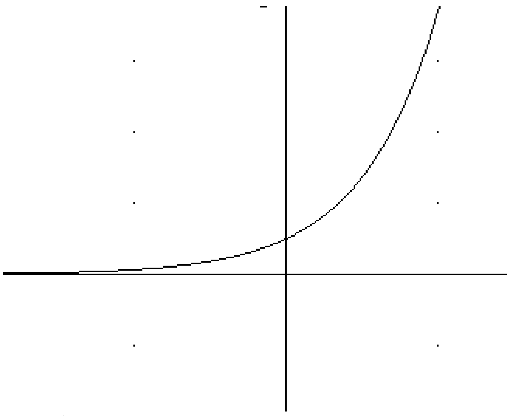
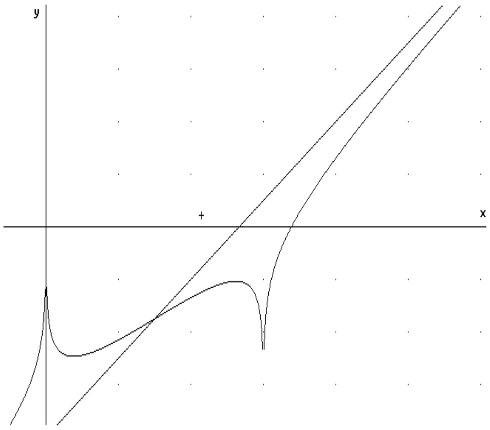
ASÍNTOTAS



Consideremos el gráfico de $f_1(x) = e^x$.
Podemos observar que $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) =$ 0; esto está determinando el hecho que el gráfico de la función se "aproxime" al eje Ox a medida que tomamos valores menores de x.



Algo parecido ocurre aquí. Estos son los esbozos de los gráficos de $f_2(x) = L\left|\dfrac{x-3}{x}\right| + 3x - 8$ y de $g(x) = 3x - 8$.
Podemos observar que al considerar valores cada vez mayores de x, las imágenes en ambas funciones se van aproximando, tanto, que se puede probar que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f_2(x) - g(x)\right) = 0$.
Esto provoca, que ambos gráficos (de f_1 y g), para valores muy grandes de x, se acerquen, así como lo hacía el gráfico anterior al eje Ox.

En ambos casos tenemos dos funciones (f_1 y f_2) que cuando la x tiende a infinito ($+\infty$ o $-\infty$ respectivamente) sus gráficos se aproximan tanto como queramos a las rectas consideradas.
Esta idea nos lleva a definir ASINTOTA. Y para ello, la primera observación, será que ésta es una recta, pero el termino "próxima" para dar una definición no nos será lo suficientemente formal para poder deducir propiedades generales.

En el segundo gráfico afirmamos que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f_2(x) - g(x)\right) = 0$. Generalizando este caso, podemos observar que si tenemos una función cualquiera *f*, y otra función lineal *g*, donde cumplan $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - g(x)\right) = 0$, estaremos en condiciones de decir que la recta determinada por la función *g* es asíntota al gráfico de *f* en $+\infty$.

<u>DEFINICIÓN:</u>

La gráfica de la función $a : a(x) = mx + n$ (*m* y *n* reales) es **asíntota** de la gráfica de *f* para x tendiendo a $+\infty$ (o $-\infty$) si y sólo si:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - (mx+n)\right) = 0 \qquad \left(\text{o } \lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - (mx+n)\right) = 0\right)$$

Obs:
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = n$ entonces la gráfica de $a : a(x) = n$ es asíntota de la gráfica de *f en* $+\infty$.

Ejercicio:

Hallar las asíntotas en $+\infty$ de:

a) $f : f(x) = \dfrac{L(x+3)}{5x}$.

b) $f : f(x) = \dfrac{3x^2+6x+3}{x^2-5x}$

c) $f : f(x) = x+2+\dfrac{1}{x^2}$

Teorema

La gráfica de $a : a(x) = mx+n$ es asíntota de la gráfica de *f* en $+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right) = n$

Dem:

La gráfica de $a : a(x) = mx+n$ es asíntota de la gráfica de f en $+\infty$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(mx+n)\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx-n\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)-n = 0 \Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right) = n$.

Teorema

Si la gráfica de $a : a(x) = mx+n$ es asíntota de la gráfica de *f* en $+\infty$ **entonces** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right) = m$

Dem:

Calculemos $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-m+m\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)-mx}{x}+m\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{n}{x}+m\right) = m.$$

(Observe que aplicamos el teorema anterior en la anteúltima igualdad).

Observaciones:

1. El recíproco no es cierto.
2. Valen también los teoremas para $x \to -\infty$

Ejercicio: Dada $f : f(x) = \dfrac{2x^2+6x+2}{x+3}$.

a) Estudiar asíntotas.

b) Estudiar dominio, signo, crecimiento y bosquejar su gráfico.

Resumen:

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = k \Rightarrow$ asíntota: $y = k$

$$\text{Si} \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{direccion asintótica} \mathbin{//} \overrightarrow{Ox} \\ \infty \Rightarrow \text{direccion asintótica} \mathbin{//} \overrightarrow{Oy} \\ m \neq 0 \Rightarrow \text{ si } \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \begin{cases} \infty \Rightarrow \text{dir as} \mathbin{//}\ y = mx \\ n \Rightarrow \text{asíntota: } y = mx+n \end{cases} \end{cases}$$