UNIDAD V
LA PARÁBOLA

OBJETIVO PARTICULAR

Al concluir la unidad, el alumno identificará y aplicará las propiedades relacionadas con el lugar geométrico llamado parábola, determinando los distintos parámetros, su ecuación respectiva y viceversa.

Se le llama parábola al conjunto de puntos cuyas distancias a un punto fijo y a una recta fija, llamados foco y directriz respectivamente, sean iguales.

5.1 ECUACIÓN EN FORMA ORDINARIA O CANÓNICA

<u>5.1.1. ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA: VERTICE, FOCO, DIRECTRIZ, PARAMETRO Y LADO RECTO. (FIG. 1):</u>

Al igual que en las ecuaciones estudiadas anteriormente, la parábola cuenta con una serie de elementos o parámetros que son básicos para su descripción, mismos que se definen a continuación:

- ***VÉRTICE (V):*** Punto de la parábola que coincide con el eje focal.

- **EJE FOCAL (ef)**: Línea recta que divide simétricamente a la parábola en dos ramas y pasa por el vértice.
- **FOCO (F):** Punto fijo no perteneciente a la parábola y que se ubica en el eje focal al interior de las ramas de la misma y a una distancia **p** del vértice.
- **DIRECTRIZ (d):** Línea recta perpendicular al eje focal que se ubica a una distancia **p** del vértice y fuera de las ramas de la parábola.
- **DISTANCIA FOCAL (p):** Magnitud de la distancia entre vértice y foco, así como entre vértice y directriz.
- **CUERDA:** Segmento de recta que une dos puntos cualesquiera, pertenecientes a la parábola.
- **CUERDA FOCAL:** Cuerda que pasa por el foco.
- **LADO RECTO (LR):** Cuerda focal que es perpendicular al eje focal.

Para ilustrar las definiciones anteriores, se ejemplifica con la siguiente gráfica de una parábola:

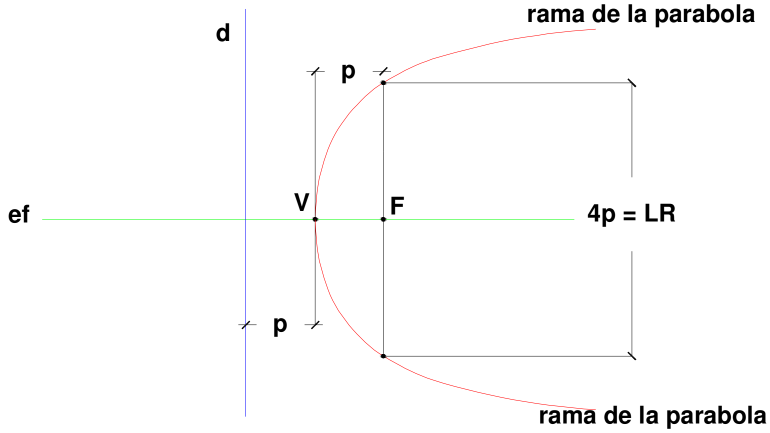


FIG. 1

5.1.2. ECUACIONES DE LA PARÁBOLA CUYO VÉRTICE ESTÁ EN EL ORIGEN.

La ecuación algebraica que describe a la parábola se encuentra expresada en función de la posición geométrica de los elementos que la conforman, así como de la orientación propia de la misma, resultando en una ecuación característica de cada caso particular.

A efecto de ejemplificar la forma de obtener la ecuación mencionada, se trabaja con la parábola cuyo vértice está en el origen, su eje focal coincidiendo con el eje de las **X** y cuyas ramas se abren hacia la derecha.

Atendiendo a la definición de la parábola, se sabe que la distancia entre un punto **"p"** cualquiera de coordenadas **(x,y)**, y el foco **"f"** será igual a la distancia existente entre la recta directriz **(d)** y dicho punto, según se aprecia en la fig 1A.

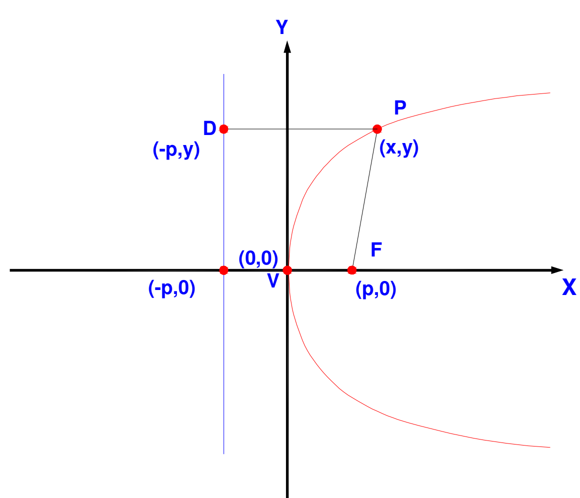


FIG. 1A

De lo anterior resulta:

$$\overline{PD} = \overline{PF}$$

Calculando la distancia entre los puntos anteriores mediante la fórmula de distancia entre dos puntos, resulta:

$$\overline{PD} = \sqrt{(x-(-p))^2 + (y-y)^2}$$

$$\overline{PD} = \sqrt{(x+p)^2}$$

y

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}$$

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

Sustituyendo en la expresión de distancias resulta:

$$\sqrt{(x+p)^2} = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

Elevando ambos miembros de la ecuación al cuadrado y desarrollando, se tiene:

$$(x+p)^2 = (x-p)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2px + p^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2$$

$$x^2 + 2px + p^2 - x^2 + 2px - p^2 = y^2$$

Simplificando términos semejantes y reordenando la expresión, se obtiene:

$$y^2 = 4px \qquad \text{(I)}$$

La cual, es la ecuación de la parábola en su forma ordinaria o canónica.

Análogamente a la demostración anterior, se puede obtener la ecuación que describe una parábola cuyo vértice no coincide con el origen del sistema de ejes coordenados. (ver sección 5.1.3)

LONGITUD DEL LADO RECTO

Procediendo de una manera similar a la empleada para la deducción de la ecuación anterior, podemos enseguida deducir una formula que nos permita calcular la longitud del lado recto:

Partiendo de la ecuación:

$$y^2 = -4px$$

Y sustituyendo **x** por **–p** se obtiene:

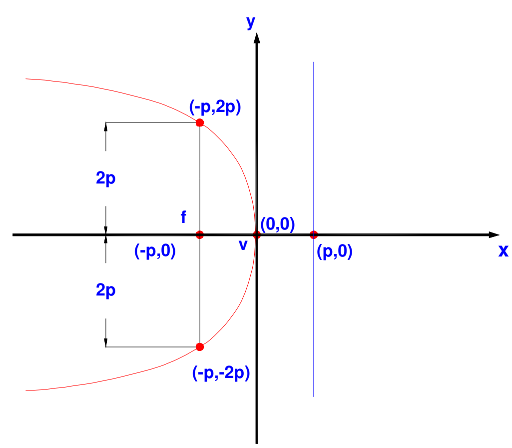
$$y^2 = -4p(-p)$$

$$y^2 = 4p^2$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros, resulta:

$$y = \pm 2p$$

Por lo que las coordenadas de los extremos del lado recto son (-p,2p) y (-p,-2p), como se observa en la siguiente gráfica:



Si se calcula la distancia entre los extremos del lado recto, resulta:

$$\overline{LR} = \left|2p - (-2p)\right|$$

$$\overline{LR} = \left|2p + 2p\right|$$

Por lo tanto

$$\overline{LR} = \left|4p\right|$$

CASO I

*Cuando la parábola se extiende en el sentido **positivo** del eje de las abscisas "**X**" (fig. 2)*

ECUACIÓN DE LA PARABOLA $y^2 = 4px$

ECUACIÓN DE LA DIRECTRIZ $x + p = 0$

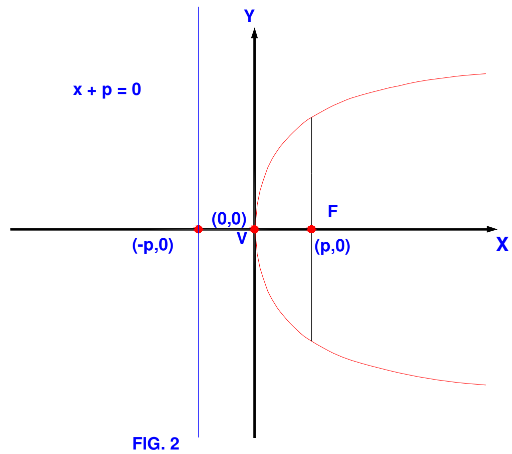


FIG. 2

CASO II

*Cuando la parábola se extiende en el sentido **negativo** del eje de las abscisas "**X**" (fig. 3)*

ECUACIÓN DE LA PARABOLA $y^2 = -4px$

ECUACIÓN DE LA DIRECTRIZ $x - p = 0$

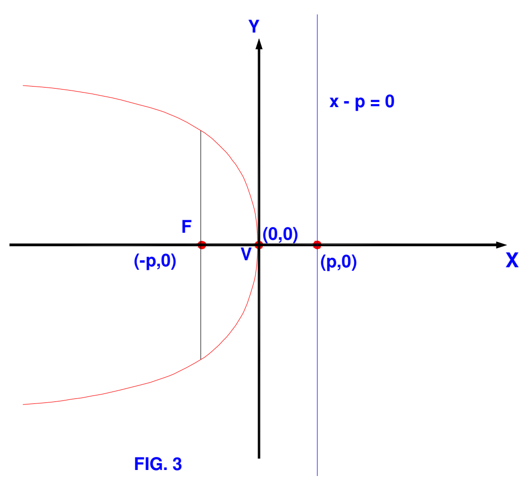


FIG. 3

CASO III

Cuando la parábola se extiende en el sentido ***positivo*** *del eje de las ordenadas “**Y**” (fig. 4)*

ECUACIÓN DE LA PARABOLA $x^2 = 4py$

ECUACIÓN DE LA DIRECTRIZ $y + p = 0$

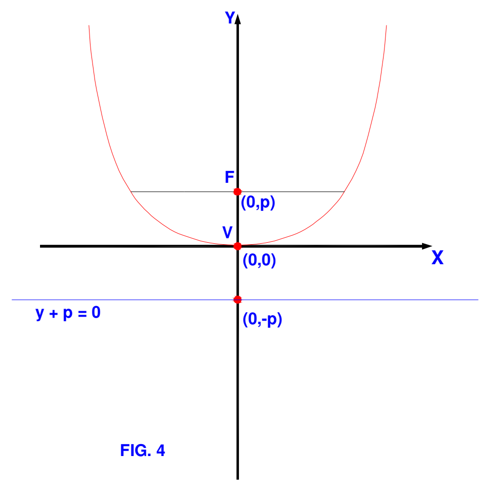


FIG. 4

CASO IV

Cuando la parábola se extiende en el sentido ***negativo*** *del eje de las ordenadas “**Y**” (fig. 5)*

ECUACIÓN DE LA PARABOLA $x^2 = -4py$

ECUACIÓN DE LA DIRECTRIZ $y - p = 0$

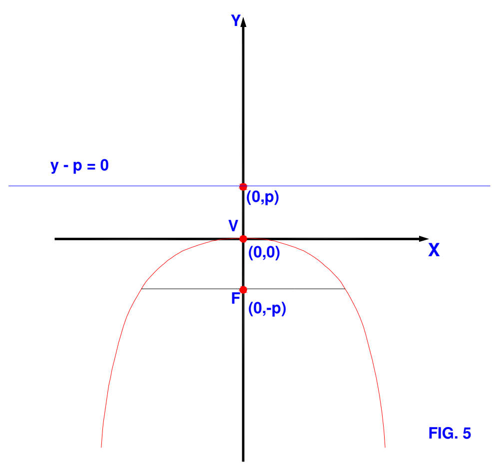


FIG. 5

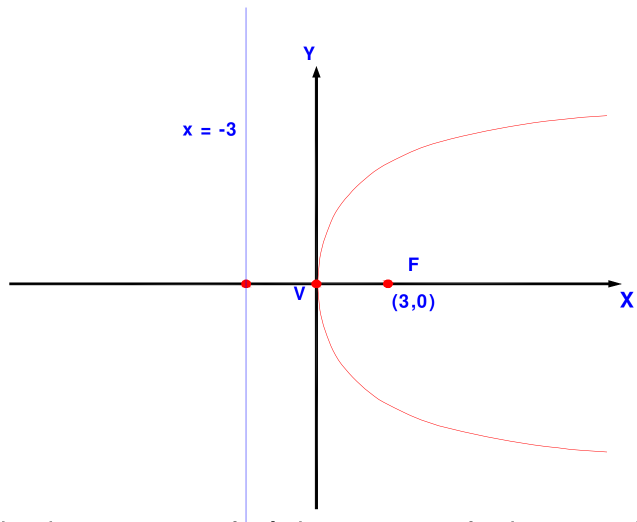
Se observa que en los casos anteriores, solamente existe un termino al cuadrado, y éste indica cual de los ejes coordenados es perpendicular al eje focal.

Además, el signo del termino a la primera potencia indica hacia donde se abre la gráfica.

EJEMPLO 1.5

Obtenga la ecuación de la parábola cuyo foco tiene coordenadas (3,0) y por directriz la recta x = -3.

Con los datos anteriores se elabora la siguiente gráfica:



Se puede observar que el vértice esta en el origen, por lo tanto p = 3.

Si la coordenada del foco es (3,0) y el vértice está en el origen, se trata de una parábola que se extiende en el sentido positivo del eje de las abscisas, por lo tanto su ecuación es:

$$y^2 = 4px$$

Sustituyendo los valores de los datos conocidos resulta:

$$y^2 = 4(3)x$$

$$y^2 = 12x$$

EJEMPLO 2.5

Una parábola pasa por el punto (6,-3), tiene su vértice en el origen y su eje focal coincide con el eje de las ordenadas. Obtenga su ecuación así como la ecuación de su directriz.

Puesto que la parábola es vertical y pasa por el punto (6,-3), se concluye que se extiende en el sentido negativo de las ordenadas, por lo cual la ecuación buscada es del tipo: $x^2 = -4py$

Si el punto (6,-3) pertenece a la gráfica, entonces necesariamente satisface a la ecuación, por tanto, sustituyendo valores:

$$(6)^2 = -4p(-3)$$

$$36 = 12p$$

Despejando *p*:

$$p = \frac{36}{12} = 3$$

Conocido el valor de la distancia focal **p**, se sustituye en la forma correspondiente de la ecuación, y resulta:

$$x^2 = -4(3)y$$

$$x^2 = -12y$$

ECUACION DE LA DIRECTRIZ

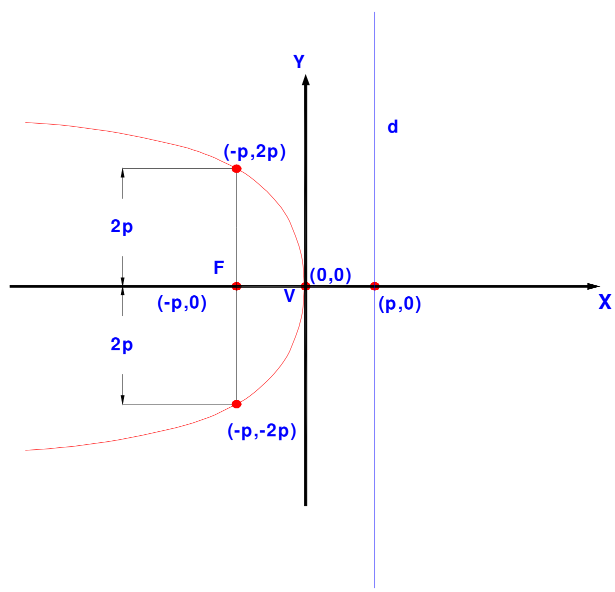
El tipo de grafica corresponde con $y - p = 0$

Sustituyendo el valor de **p**, resulta:

$$y - 3 = 0$$

EJEMPLO 3.5

Partiendo de la ecuación de la parábola $y^2 = -8x$, obtenga las coordenadas del vértice, del foco, de los extremos del lado recto, así como la longitud del mismo y además la ecuación de la directriz.



De la gráfica se observa que el vértice tiene las coordenadas:

V(0,0)

Y además de la gráfica y del análisis de la ecuación, se obtiene el valor de la distancia focal:

Sí $y^2 = -8x$ Y $y^2 = -4px$

Entonces

$-4p = -8$

$$p = \frac{-8}{-4} = 2$$

p = 2

De acuerdo a lo anterior y según el gráfico de apoyo las coordenadas del foco serán:

F (-2,0)

Ya que la directriz intersecta al eje de las abscisas en el punto (2,0), su ecuación será:

x – 2 = 0

Las coordenadas de los extremos del lado recto, al estar alineadas con el foco tienen la misma abscisa y sus ordenadas se obtienen sumando y restando a la ordenada del foco, el doble de la distancia focal **p**:

p = 2

Por lo que: 2p = 2(2) = 4

Ordenada del foco y = 0

Extremo superior: (-2,0+4)

(-2,4)

Extremo inferior: (-2,0-4)

(-2,-4)

La longitud del lado recto es $\overline{LR} = |4p|$

Por lo que entonces:

$\overline{LR} = |4(2)|$

LR = 8 u

EJERCICIOS

5.1 Dada la ecuación de la parábola $x^2 = -28y$ obtenga las coordenadas del vértice, del foco, de los extremos del lado recto, así como la longitud del mismo y la ecuación de su directriz.

5.2 Encuentre la ecuación de una parábola cuyo foco tiene coordenadas (4,0) y su directriz es $x + 4 = 0$.

5.3 Grafique la curva correspondiente a $y = x^2$. Señalando además las coordenadas de sus elementos característicos.

5.4 La sección transversal de un canal de excedentes en una presa es una parábola con una profundidad de 3 mts. y de 6 mts de abertura. Encuentre la ecuación que describe dicha parábola.

5.5 Determine las coordenadas del foco, la longitud del lado recto y las coordenadas del punto por donde la directriz corta al eje coordenado, en una parábola cuya ecuación es: $3y^2 = -4x$

5.1.3 ECUACIONES DE LA PARÁBOLA CUYO VÉRTICE NO COINCIDE CON EL ORIGEN.

Cuando el vértice se localiza en cualquier punto, al que por convención se le asignan las coordenadas (h,k), y éste es distinto al origen, la ecuación que describe a la parábola cambia en función de la posición de este punto y además de la orientación de la curva respecto de los ejes coordenados.

CASO I

Este lo consideraremos en el caso de que la parábola se extienda en el sentido ***positivo*** *del eje de las abscisas "**X**" (FIG. 6)*

ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA $(y-k)^2 = 4p(x-h)$
ECUACIÓN DE LA DIRECTRIZ $x-h+p=0$

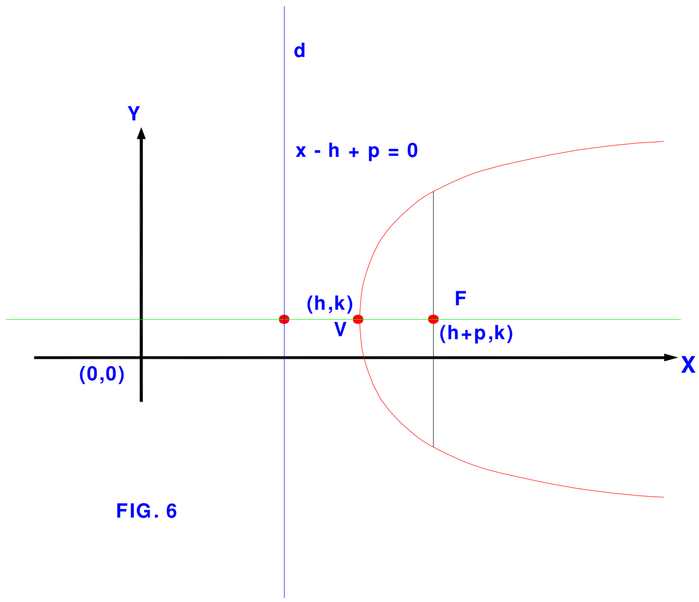


FIG. 6

CASO II
Cuando la parábola se extiende en el sentido ***negativo*** *del eje de las abscisas "**X**" (FIG. 7)*

ECUACIÓN DE LA PARABOLA $(y-k)^2 = -4p(x-h)$
ECUACIÓN DE LA RECTA DIRECTRIZ $x-h-p=0$

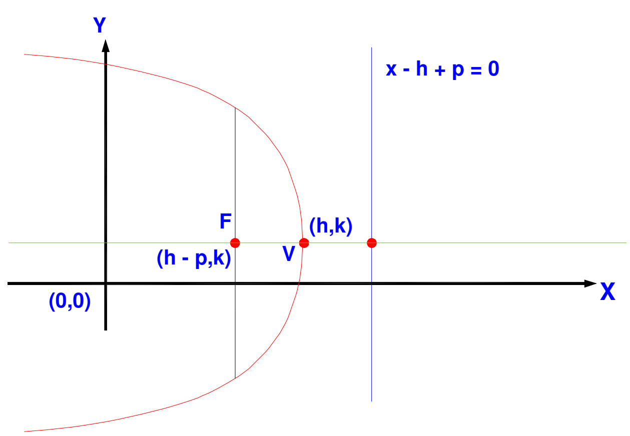


FIG. 7

CASO III

*Cuando la parábola se extiende en el sentido **positivo** del eje de las ordenadas “**Y**” (FIG. 8)*

ECUACIÓN DE LA PARABOLA $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

ECUACIÓN DE LA RECTA DIRECTRIZ $y-k+p=0$

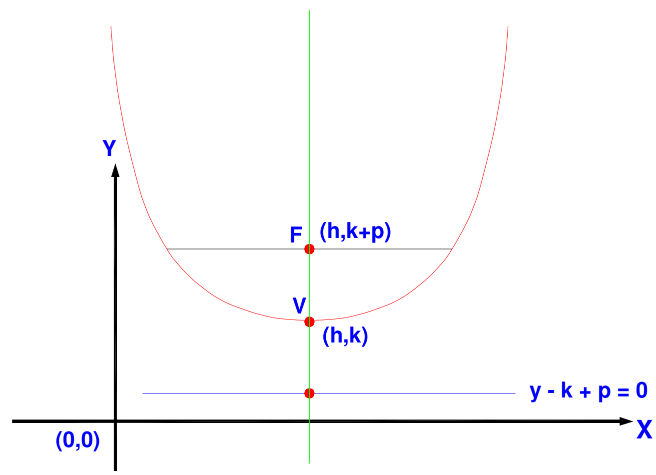


FIG. 8

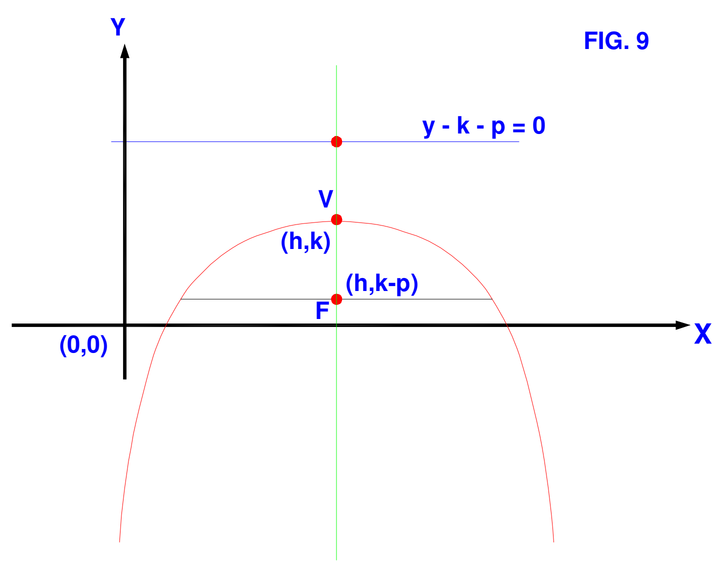
CASO IV

*Cuando la parábola se extiende en el sentido **negativo** del eje de las ordenadas “**Y**” (FIG. 8)*

ECUACIÓN DE LA PARABOLA $(x-h)^2 = -4p(y-k)$

ECUACIÓN DE LA RECTA DIRECTRIZ $y-k-p=0$

FIG. 9



En todos los casos anteriores la longitud del lado recto se calcula empleando la fórmula descrita en la sección anterior.

$$\overline{LR} = |4p|$$

EJEMPLO 4.5

Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el punto (3,2) y foco en (5,2).

SOLUCION:

Analizando las coordenadas de vértice y foco, se observa que su ordenada es común, por lo que se concluye que están alineados horizontalmente y que el foco está a la izquierda del vértice.
Dado lo anterior, es posible afirmar que su ecuación tiene la forma:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Siendo las coordenadas del vértice (h,k), se sustituyen en la ecuación y resulta:

$$(y-2)^2 = 4p(x-3)$$

En donde el parámetro p representa la distancia del vértice al foco, y ésta se obtiene por diferencia de las abscisas correspondientes:

p = 5 – 3

p = 2

Sustituyendo:

$$(y-2)^2 = 4(2)(x-3)$$

Resulta:

$$(y-2)^2 = 8(x-3)$$

Ecuación escrita en la forma ordinaria

EJEMPLO 5.5

Determine las coordenadas del vértice, del foco, la longitud del lado recto y la ecuación de la directriz, en una parábola cuya ecuación es:

$$(x+6)^2 = -24(y-2)$$

Solución: la ecuación corresponde a una parábola vertical cuyas ramas se abren en el sentido negativo de las ordenadas, cuya forma es:

$$(x-h)^2 = -4p(y-k)$$

De lo anterior se observa que:

$- 4p = - 24$

Por lo tanto, la longitud del lado recto es:

$$\overline{LR} = |4p|$$

LR = 24 u

De igual forma se observa que las coordenadas del vértice corresponden con los valores de h y k, tomando en cuenta los signos respectivos, se deduce que el vértice es el punto de coordenadas:

V(-6,2)

Sí

$$-\ 4p = -24\ ,$$

Entonces la distancia focal p será:

$$-4p = -24$$

$$p = \frac{-24}{-4} = 6$$

Las coordenadas del foco se obtienen por la abscisa común a ambos puntos y calculando la diferencia de la ordenada del vértice y la distancia focal.

F(-6,2-6)

F(-6,-4)

Para determinar ecuación de la directriz se sustituyen los datos conocidos *p* y *k* en:

$$y - k - p = 0$$

$$y - 2 - 6 = 0$$

Resultando la ecuación:

$$y - 8 = 0$$

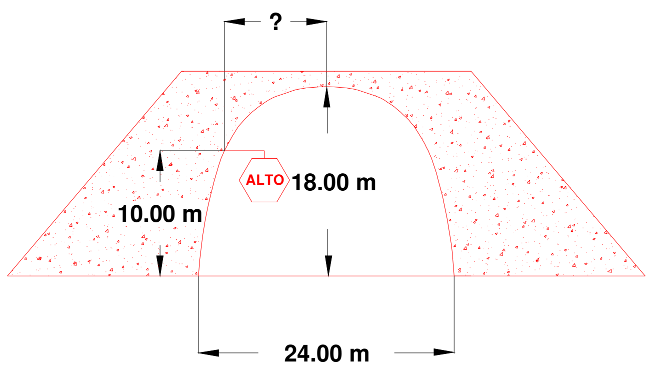
<u>EJERCICIOS</u>

5.6 Grafique la parábola cuya ecuación es $(y - 4)^2 = -12\left(x + \frac{1}{12}\right)$ indicando las coordenadas de los extremos del ancho focal, del foco y vértice, así como la longitud lado recto y la directriz.

5.7 Encuentre la ecuación de la parábola cuyo vértice pertenece a la recta $7x + 3y = 4$, con eje focal horizontal y que pasa por los puntos (3,-5) y (1.5,1).

5.8 Encuentre la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto (2,3), con eje simétrico vertical y que pasa por el punto (4,5).

5.9 Hallar la distancia que separa el centro de un túnel con forma de arco parabólico y altura máxima de 18 mts. con respecto del punto de sujeción de una señal colocada a una altura de 10 mts. El túnel tiene una luz total de 24 mts.



5.10 Encuentre la ecuación de la parábola cuyos extremos del lado recto son los puntos (3,-5) y (19,-5). Considere que el vértice corresponde a un punto máximo en la curva.

5.11 Por inspección, encuentre la ecuación, expresada en su forma general, para la siguiente parábola, así como las coordenadas de los extremos del ancho focal y la ecuación de su directriz.

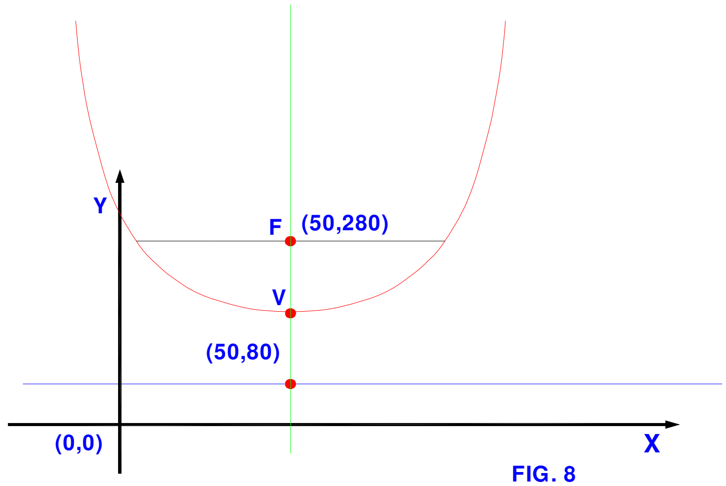


FIG. 8

5.2. ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA EN FORMA GENERAL.

En cualquiera de los casos anteriores, la estructura de la ecuación de la parábola tiene las siguientes características:

- Existe solamente una variable al cuadrado y otra lineal.
- El coeficiente de la variable lineal (4p) representa la proporción del lado recto con respecto de la distancia focal.

Pero además de lo anterior, desde el punto de vista de las estructuras algebraicas, es una ecuación de segundo grado, que puede expresarse en la forma general de este tipo.

5.3. OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA.

Para llegar a dicha expresión general, es necesario desarrollar algebraicamente la forma canónica de la ecuación.

Tomando como ejemplo la forma:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Desarrollando resulta:

$$x^2 - 2hx + h^2 = 4py - 4pk$$

$$x^2 - 2hx + h^2 - 4py + 4pk = 0$$

Multiplicando la ecuación por un coeficiente "**A**" con la intención de generalizar, y considerando A ≠ 0

$$Ax^2 - 2Ahx + Ah^2 - 4Apy + 4Apk = 0$$

Reordenando

$$Ax^2 - 4Apy - 2Ahx + Ah^2 + 4Apk = 0$$

$$Ax^2 - 4Apy - 2Ahx + A\left(h^2 + 4pk\right) = 0$$

Haciendo que los coeficientes de las variables sean:

$$-4Ap = D$$

$$-2Ah = E$$

$$\left(h^2 + 4pk\right)A = F$$

Sustituyendo los coeficientes ***D***,***E*** y ***F*** en la ecuación

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Que es la ecuación de una parábola horizontal en su forma general.

Análogamente para una parábola de orientación vertical, la ecuación en su forma general será:

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

<u>EJEMPLO 6.5</u>

Una parábola tiene vértice en el punto (- 4,2), y su directriz es y = 5, encuentre su ecuación y exprésela en la forma general.

(SE DEJA AL ALUMNO QUE GRAFIQUE LA DIRECTRIZ Y LA POSICION DEL VERTICE PARA ILUSTRAR LA SOLUCION)

Analizando las coordenadas del vértice y la posición de la directriz, se puede concluir que:

a) La directriz es paralela al eje de las abscisas, por lo tanto la posición de la parábola es vertical.
b) La directriz corta al eje de las ordenadas en un valor mayor que la ordenada del vértice, por lo tanto las ramas de la parábola se extienden en el sentido negativo del eje de las Y.

c) Las coordenadas del vértice no corresponden con las del origen.
d) Dado lo anterior se trata entonces de una parábola cuya ecuación ordinaria es del tipo:

$$(x-h)^2=-4p(y-k)$$

De las coordenadas del vértice se obtiene:

h = - 4

k = 2

Se obtiene **p** por diferencia entre las ordenadas del vértice y de la recta directriz, resultando:

p = 5 – 2

p = 3

Sustituyendo valores en la ecuación ordinaria, resulta:

$$(x-h)^2=-4p(y-k)$$

$$(x-(-4))^2=-4(3)(y-2)$$

$$(x+4)^2=-12(y-2)$$

$$(x+4)^2=-12y+24$$

Desarrollando el binomio al cuadrado

$$x^2+8x+16=-12y+24$$

Simplificando e igualando a cero la ecuación se tiene:

$$x^2+8x+16+12y-24=0$$

$$x^2+8x+12y-8=0$$

Que es la ecuación buscada.

5.4. CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS DE LA PARÁBOLA DADA SU ECUACIÓN.

EJEMPLO 7.5

Dada la ecuación de la parábola $y^2 + 8y - 6x + 4 = 0$, encuentre las coordenadas del vértice y del foco, así como la ecuación de su directriz.

Una forma de obtener los elementos solicitados consiste en reducir la ecuación anterior llevándola a la forma ordinaria.

Como primer paso se separan a diferentes miembros la variable al cuadrado (Y) y la variable lineal (X) junto con el termino independiente

$$y^2 + 8y = 6x - 4$$

Con la intención de factorizar se procede a la adición (en ambos miembros de la ecuación) de un término adecuado para que se complete el trinomio cuadrado perfecto:

$$y^2 + 8y + 16 = 6x - 4 + 16$$

Simplificando:

$$y^2 + 8y + 16 = 6x + 12$$

Factorizando resulta:

$$(y + 4)^2 = 6(x + 2)$$

Que es la ecuación ordinaria de una parábola con vértice fuera del origen, horizontal y que se extiende en el sentido positivo del eje de las abscisas, según lo visto anteriormente.

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Con lo cual se puede determinar que:

k = - 4

h = - 2

Por lo tanto el vértice tiene las coordenadas V(-2,-4)

Además:

SÍ 4p = 6

Entonces $$p = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Considerando la orientación ya señalada de la parábola y el valor de p, es posible determinar la posición del foco, ya que éste estará alineado a la derecha del vértice a una distancia **p** desde **h**, y con la misma ordenada **k**, resultando:

$$f(h+p,k)$$

$$f(-2+\frac{3}{2},-4)$$

$$f(-\frac{1}{2},-4)$$

La ecuación de la directriz se obtiene de $x-h+p=0$,

Resultando:

$$x-(-2)+\left(\frac{3}{2}\right)=0$$

$$x+\frac{4}{2}+\frac{3}{2}=0$$

$$x+\frac{7}{2}=0$$

EJERCICIOS:

5.12 Encuentre el vértice, foco, la ecuación de la directriz, así como la longitud del lado recto de las parábolas siguientes:

a) $y = x^2 - 4x + 2$

b) $y^2 + 14y + 4x + 45 = 0$

5.13 Determine la ecuación de la parábola que tiene por vértice al punto (-3,5), de eje paralelo al eje X y que pasa por el punto (5,9)

5.14 Encuentre la ecuación de la parábola, en su forma general, que pasa por los puntos (2,5), (- 2, - 3) y (1,6)

5.15 El cable de suspensión de un puente colgante adquiere una catenaria parabólica. Las columnas que lo soportan miden 60 m de altura y se encuentran espaciadas a 500 m quedando el punto mas bajo del cable a una altura de 10 m sobre la superficie del puente. Considere como eje X la superficie del puente y como eje Y la simetría del cable, para encontrar la altura de un punto situado a 80 m del centro del puente.

5.16 Encuentre la ecuación en forma general de la parábola con foco en (0,6) y con directriz superpuesta al eje X

5.17 Encuentre la ecuación en forma general de la parábola que tiene foco en (- 2, 3) y cuyos extremos del lado recto son (- 2, 2) y (- 2, 4).

5.5. CONDICIONES PARA QUE UNA ECUACIÓN DEL TIPO $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$ CORRESPONDA A UNA PARÁBOLA.

La ecuación general de segundo grado

$$\underline{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

corresponde a una parábola al cumplirse la siguiente condición:

- El coeficiente de una de las variables al cuadrado es cero y el otro es distinto de cero, es decir que solamente existe una cantidad x^2 o bien una y^2, pero no de manera simultánea.

$$\underline{A = 0 \vee C = 0}$$

El estudio detallado de este tema se realizará en la unidad VIII correspondiente con el ESTUDIO GENERAL DE LAS CONICAS.