



Lección 11: Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Ecuaciones con dos incógnitas

Existen muchos problemas que pueden plantearse a través de ecuaciones con más de una incógnita. Veamos el siguiente ejemplo:

María recorrió 10 Km siempre en la misma dirección, una parte del recorrido lo hizo a pie y el resto en camión. ¿Cuántos kilómetros caminó y cuántos recorrió en camión?

Es claro que la pregunta anterior da lugar a muchas respuestas. Podríamos decir por ejemplo, que María recorrió:

- 5 Km a pie y 5 Km en camión, porque $5 + 5 = 10$
- 1 Km a pie y 9 Km en camión, porque $1 + 9 = 10$
- 2.5 Km a pie y 7.5 Km en camión, porque $2.5 + 7.5 = 10$
- 0.8 Km a pie y 9.2 Km en camión, porque $0.8 + 9.2 = 10$

Usted puede encontrar otras parejas de números que pueden ser solución del problema. Pero no cualquier pareja de números es solución del problema. Por ejemplo

- Los números 3 y 8 no son solución, porque $3 + 8 = 11 \neq 10$
- Los números -1 y 11 tampoco son solución, porque aunque $-1 + 11 = 10$, María siempre caminó en la misma dirección y entonces no pudo recorrer -1 Km a pie.



Si llamamos x a la cantidad de kilómetros que María caminó y si llamamos y a la cantidad de kilómetros recorridos en camión, podemos describir el problema anterior del siguiente modo:

$$x + y = 10$$

A expresiones de este estilo se las denomina **ecuaciones de primer grado con dos incógnitas** o **ecuaciones lineales con dos incógnitas**.

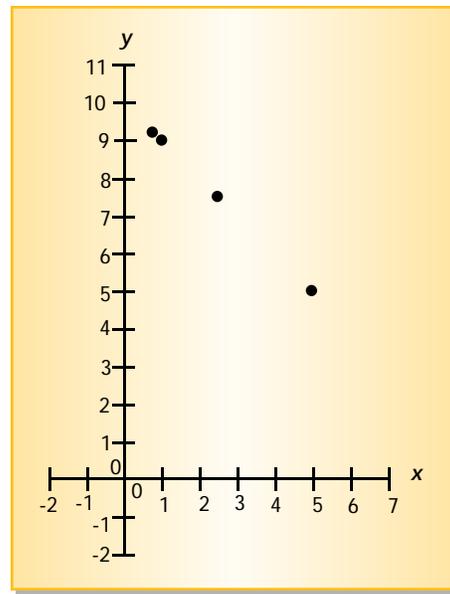
Ya dijimos que este problema tiene muchísimas soluciones de las que hemos encontrado sólo algunas. Las soluciones que hemos encontrado:

$$x = 5, \quad y = 5 \quad x = 1, \quad y = 9 \quad x = 2.5, \quad y = 7.5 \quad x = 0.8, \quad y = 9.2$$

pueden ser expresadas como parejas ordenadas:

$$(5, 5) \quad (1, 9) \quad (2.5, 7.5) \quad (0.8, 9.2)$$

Y estas parejas ordenadas nos pueden servir para representar gráficamente las soluciones que hemos encontrado. Para ello consideramos los valores de x como abscisa, y los de y como ordenadas. Así, las primeras soluciones quedarán representadas por los siguientes puntos.



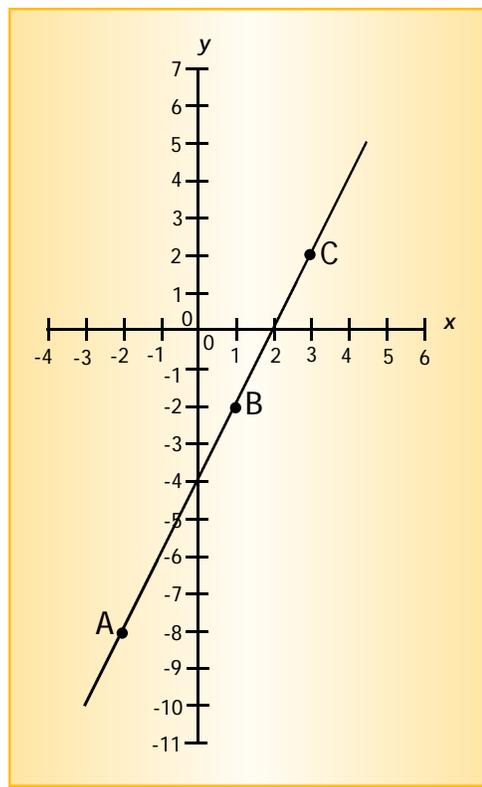
Ejercicio 1

- Copie la gráfica anterior.
- Encuentre otras parejas de números que sean solución de la ecuación $x + y = 10$ y representélas en la gráfica, con puntos.
- Trace una recta que pase por dos puntos cualesquiera de la gráfica. Los demás puntos de la gráfica ¿quedan en la recta o fuera de ella?
- Encuentre dos parejas de números que NO sean solución de la ecuación $x + y = 10$ y representélas en la gráfica.
- Los dos puntos recién trazados ¿quedan en la recta o fuera de ella?

Ejercicio 2

Considere la ecuación $-2x + y = -4$.

- Verifique que las parejas $(-1, -6)$, $(0, -4)$, $(2, 0)$, y $(5, 6)$ son solución de la ecuación.
- Verifique que los puntos que representan a esas parejas de números están en la gráfica de la derecha.
- Encuentre las coordenadas de los puntos A, B y C que están en la gráfica.
- Verifique que las parejas de números encontradas en el inciso anterior son solución de la ecuación.



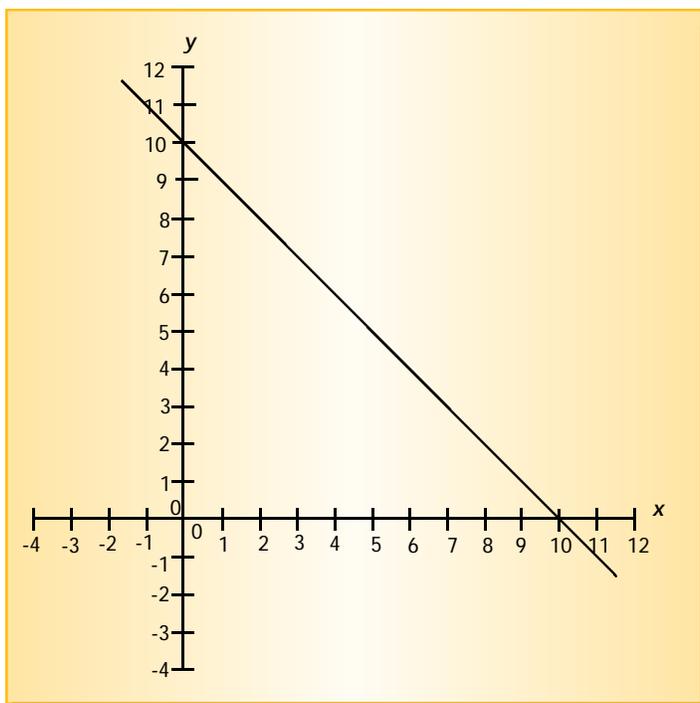
Gráfica de una ecuación lineal

Regresemos a nuestra ecuación:

$$x + y = 10$$

Nosotros hemos representado sólo algunas parejas ordenadas y usted ha podido observar (al realizar los ejercicios anteriores) que todos los puntos que representan soluciones están sobre una

línea recta. Sabemos que la ecuación anterior tiene infinitud de soluciones, y puede demostrarse que todos los puntos que pertenecen a la siguiente recta, son solución de la ecuación.



Observe que hay puntos que pertenecen a la recta y son solución de la ecuación, pero no son respuesta al problema planteado.

Por ejemplo la pareja $(-1, 11)$ es solución de la ecuación, porque $-1 + 11 = 10$, pero no puede ser respuesta al problema porque no tiene sentido decir que María caminó -1 Km.

Lo que hemos observado con la ecuación $x + y = 10$, ocurre con todas las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

(también llamadas ecuaciones lineales), y se puede enunciar del siguiente modo:

- Toda ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.
- Los puntos que representan todas las soluciones de una ecuación de primer grado con dos incógnitas forman una línea recta.

Veamos ahora cómo trazar esa recta. Ya sabemos que para trazar una recta sólo necesitamos dos puntos, entonces si queremos representar todas las soluciones de una ecuación lineal, basta con que localicemos los puntos que representan a dos de sus soluciones.

Por ejemplo, si queremos obtener la recta que representa todas las soluciones de la ecuación:

$$x - y = 6,$$

buscamos dos parejas de números que sean soluciones y las representamos gráficamente; si trazamos la recta que pasa por esos dos puntos, encontramos la gráfica de soluciones de la ecuación.

Podemos ver que las parejas:

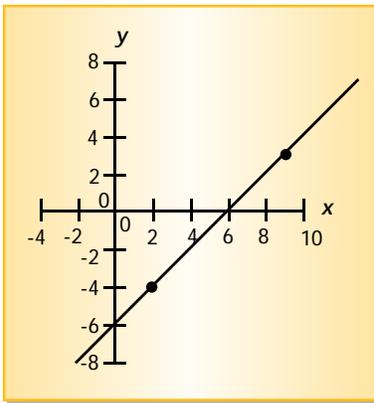
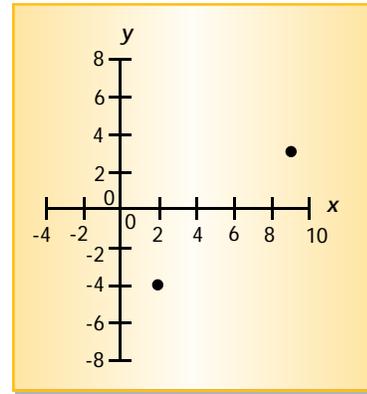
$$(9, 3) \quad \text{y} \quad (2, -4)$$

son soluciones de la ecuación porque:

$$9 - 3 = 6 \quad \text{y} \quad 2 - (-4) = 6.$$

Los puntos que representan a estas dos parejas se muestran en la gráfica de la derecha.

Ahora podemos trazar la recta que buscábamos.



En los dos ejemplos que hemos manejado, ha sido fácil encontrar parejas de números que sean solución de la ecuación. En algunos casos esto puede ser un poco menos sencillo. Veamos otro ejemplo:

Se quiere encontrar la recta que representa a todas las soluciones de la ecuación:

$$3x + 2y = 30.$$

Sabemos que sólo necesitamos dos puntos para determinar la recta, entonces bastará con encontrar dos parejas de números. Para ello podemos dar un valor cualquiera a x , por ejemplo 4 y hacer la sustitución correspondiente. Así obtenemos la ecuación $3(4) + 2y = 30$ que tiene una sola incógnita y que usted ya sabe resolver.

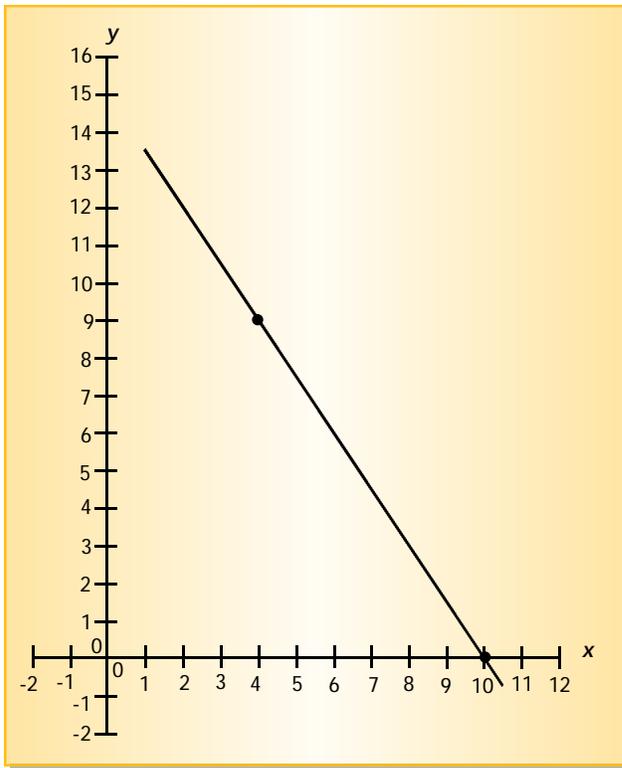
$$\begin{aligned} 3(4) + 2y &= 30 \\ 12 + 2y &= 30 \\ 2y &= 30 - 12 \\ y &= 18 \div 2 \\ y &= 9 \end{aligned}$$

Del mismo modo, si decimos que $x = 10$, tenemos:

$$\begin{aligned}3(10) + 2y &= 30 \\30 + 2y &= 30 \\2y &= 30 - 30 \\y &= 0 \div 2 \\y &= 0\end{aligned}$$

Usted puede verificar que las parejas $(4, 9)$ y $(10, 0)$, son soluciones de la ecuación.

Y la recta trazada, que pasa por los puntos de coordenadas $(4, 9)$ y $(10, 0)$, representa a todas las soluciones a la ecuación $3x + 2y = 30$.



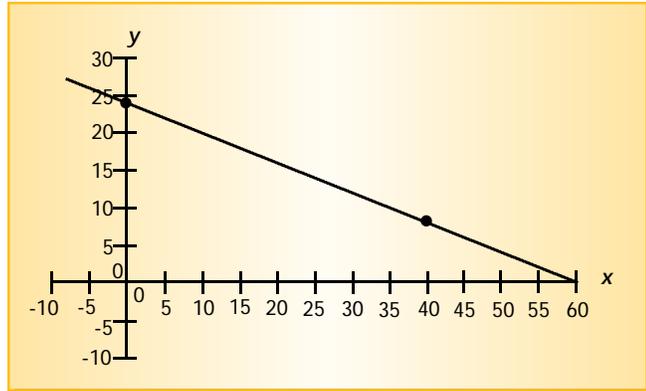
Finalizaremos esta sección haciendo una reflexión acerca de la diferencia entre las soluciones de un problema y las soluciones a la ecuación. Consideremos el siguiente problema:

Juan decidió no gastar las monedas de \$2 y \$5.
Al cabo de un tiempo su ahorro ascendía a \$120.
¿Cuántas monedas de \$2 y cuántas de \$5 juntó Juan?

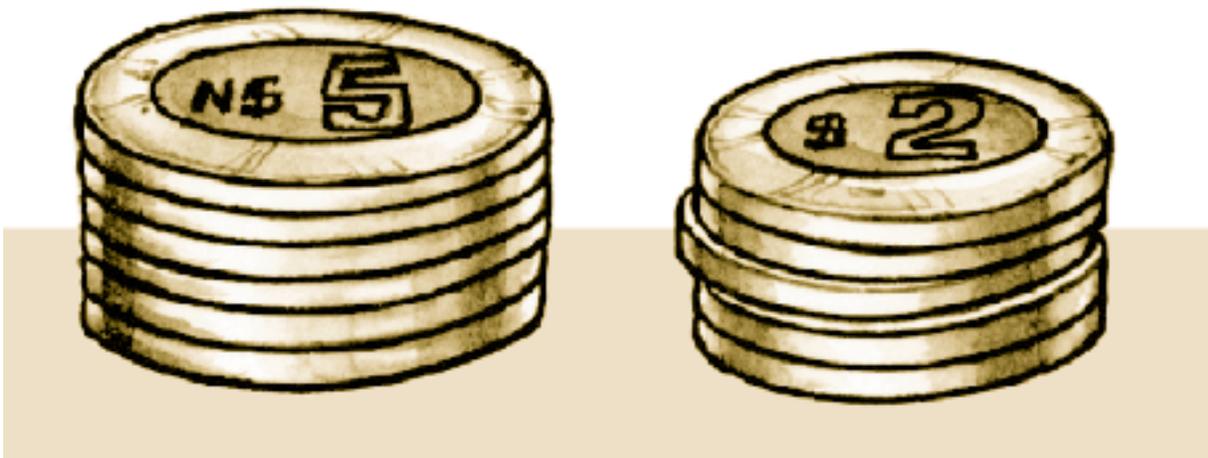
Si llamamos x a la cantidad de monedas de \$2 y llamamos y a la cantidad de monedas de \$5 podemos describir la situación planteada con la siguiente ecuación lineal

$$2x + 5y = 120$$

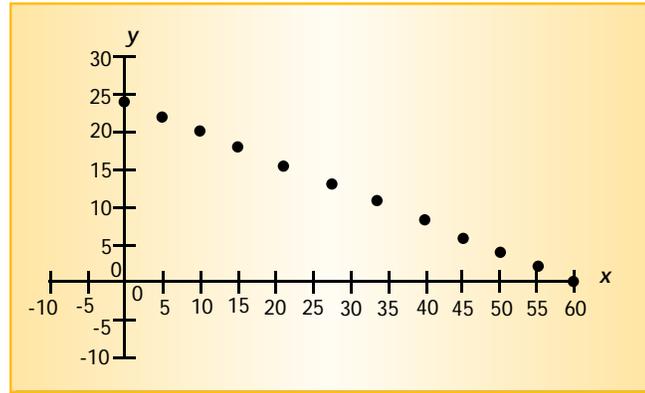
Esta ecuación tiene una infinidad de soluciones, y para trazar la gráfica de ellas podemos encontrar como en el ejemplo anterior dos soluciones; por ejemplo, para $x = 0$ encontramos $y = 120 \div 5 = 24$, y para $x = 40$ encontramos $y = (120 - 80) \div 5 = 8$. Entonces podemos trazar la recta que pasa por los puntos $(0, 24)$ y $(40, 8)$:



Observe que la recta contiene a todas las soluciones de la ecuación, sin embargo no todas ellas son respuestas al problema planteado, ya que por tratarse de cantidad de monedas sólo pueden considerarse como posibles respuestas las parejas de números naturales.



Es decir, la gráfica de la página anterior representa a todas las soluciones a la *ecuación*, pero de todos los puntos que la conforman sólo una pequeña minoría son soluciones al *problema*. De hecho, si quisiéramos graficar solamente las soluciones al problema, encontraríamos una gráfica como la que se muestra a la derecha.



Ejercicio 3

Para cada una de las siguientes ecuaciones, encuentre la recta que representa a todas las soluciones.

- a) $-x + y = 4$
- b) $x + y = -2$

Ejercicio 4

Considere la ecuación $x - y = 3$.

- a) Encuentre la recta que representa todas las soluciones.
- b) Complete las siguientes parejas de números para que sean soluciones de la ecuación.

- $x = 5, y = \square$
- $x = -1, y = \square$

- $x = \square$, $y = 6$
- $x = \square$, $y = -1$
- $x = 2.5$, $y =$
- $x = \square$, $y = 0$
- $x = 0$, $y = \square$

Ejercicio 5

Trace la gráfica de soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones lineales.

- a) $-2x + 2y = 14$
- b) $4x - 2y = -2$

Ejercicio 6

Un terreno rectangular tiene un perímetro de 74 m, y se quiere conocer su largo y su ancho.

- a) Encuentre una ecuación que corresponda al enunciado del problema, en la que x sea el largo del terreno y y sea su ancho.
- b) Trace la gráfica de soluciones de la ecuación.
- c) A partir de la gráfica, encuentre tres parejas de números que sean solución del problema y dos parejas que sean solución de la ecuación pero no del problema.