UNIDAD IV: LA PARABOLA.

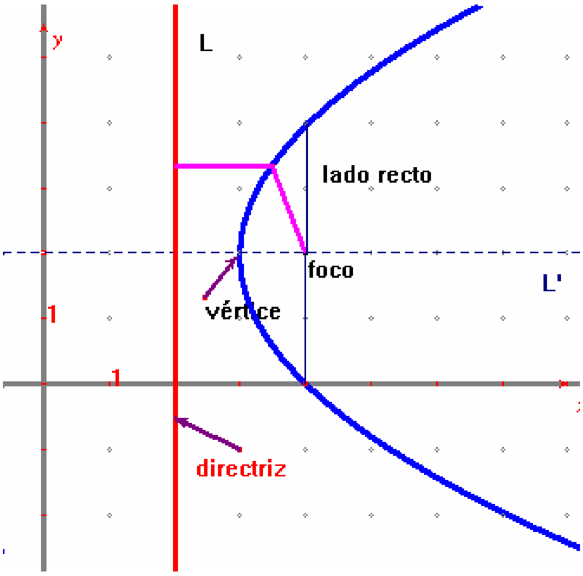
4.1. Caracterización geométrica.

4.1.1. La parábola como lugar geométrico.

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta llamada directriz.

4.1.2. Elementos asociados con una parábola

4.1.3. Formas de trazo a partir de la definición.



D = Directriz x = - p o y = - p

F = Foco (p, 0)

AF = Eje focal, o eje de la parábola.

V = Vértice, punto donde la parábola corta al eje focal.

LR = Ancho focal, lado recto de la parábola, es el parámetro principal, su longitud es cuatro veces la distancia del vértice al foco; es el segmento perpendicular al eje de la parábola que pasa por el foco.

p = Distancia del vértice al foco p = AV = VF.

P = Punto cualesquiera de la curva con coordenadas (x, y).

4.2. Ecuaciones ordinarias de la parábola.

4.2.1. Parábolas horizontales y verticales con centro en el origen.

- Obtención de los elementos a partir de la ecuación.
- Obtención de la ecuación a partir de los elementos.

Para deducir la ecuación de la parábola, hacemos coincidir la figura con los ejes coordenados, el vértice V con el origen O y el eje focal sobre el eje X.
P(x, y) es un punto cualquiera de la parábola.

PF = PQ (1) por definición de parábola.

PF = $(x – p)^2 + (y – 0)^2$ aplicando la relación de la distancia entre dos puntos.

PQ = QM + MP = p + x por construcción.

$(x - p)^2 + y^2 \quad = x + p$ sustituyendo en (1).

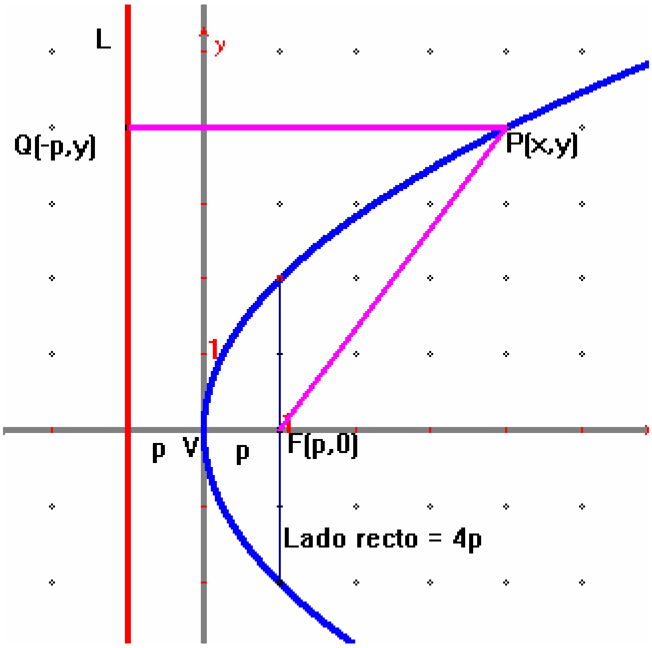
$(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2$ elevando al cuadrado ambos miembros desarrollando y simplificando:

$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$

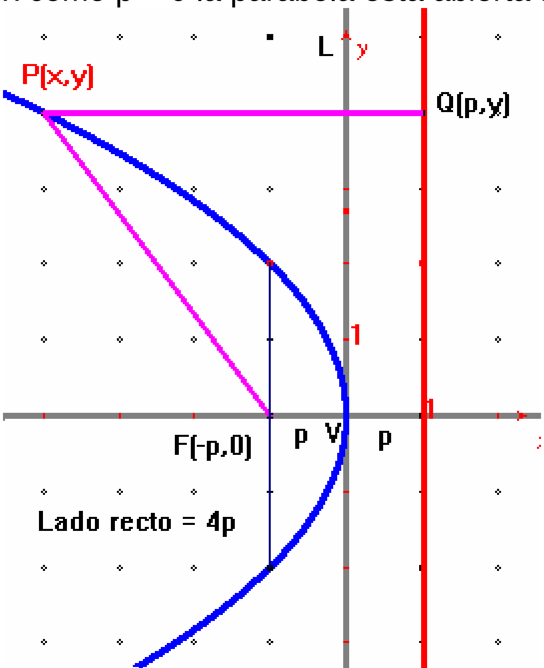
$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - x^2 - 2px - p^2 = 0$

$y^2 - 4px = 0$

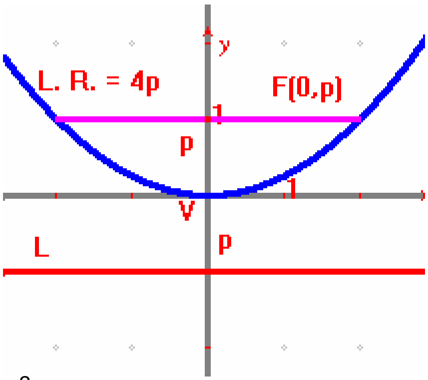
$y^2 = 4px$ Ecuación de la parábola con vértice en el origen. Eje focal horizontal sobre el eje x como p > 0 la parábola esta abierta a la derecha, en su forma canónica.



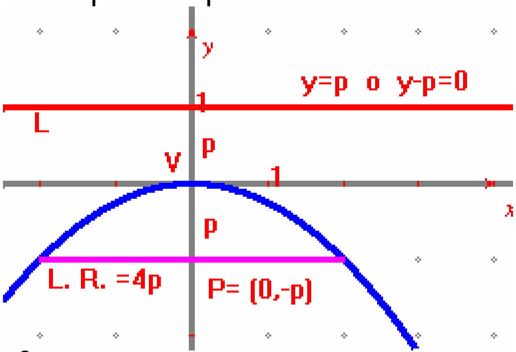
$y^2 = 4px$ Ecuación de la parábola con vértice en el origen. Eje focal horizontal sobre el eje x como p > 0 la parábola esta abierta a la derecha en su forma canónica



$y^2 = - 4px$ Ecuación de la parábola con vértice en el origen. Eje focal horizontal sobre el eje x, como p < 0 la parábola esta abierta a la izquierda en su forma canónica.



$x^2 = 4py$ Ecuación de la parábola con vértice en el origen. Eje focal vertical sobre el eje y, como $p > 0$ la parábola esta abierta hacia arriba en su forma canónica.

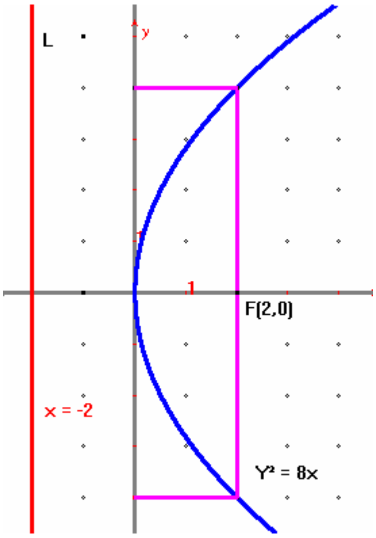


$x^2 = - 4py$ Ecuación de la parábola con vértice en el origen. Eje focal vertical sobre el eje y, como $p < 0$ la parábola esta abierta hacia abajo en su forma canónica.

Conclusión: x^2 o y^2 nos indican si la parábola es horizontal o vertical; si es x^2 es vertical y si es y^2 es horizontal. El signo de p señala hacia donde esta abierta la parábola; si es positiva arriba o a la derecha; si es negativa, abajo o a la izquierda.
El segmento que une dos puntos de la parábola se llama cuerda de ella y le son perpendiculares; por ello se dice que la parábola es simétrica con respecto a su eje.
El ancho focal es igual a 4p.
La condición característica que identifica a la parábola con respecto a las otras curvas (circunferencia, elipse e hipérbola) es que alguno de los coeficientes de x^2 o y^2 es nulo, en cuyo caso se trata de una parábola o el conjunto vacío. Además, en algunos casos tendrá el termino Bxy.

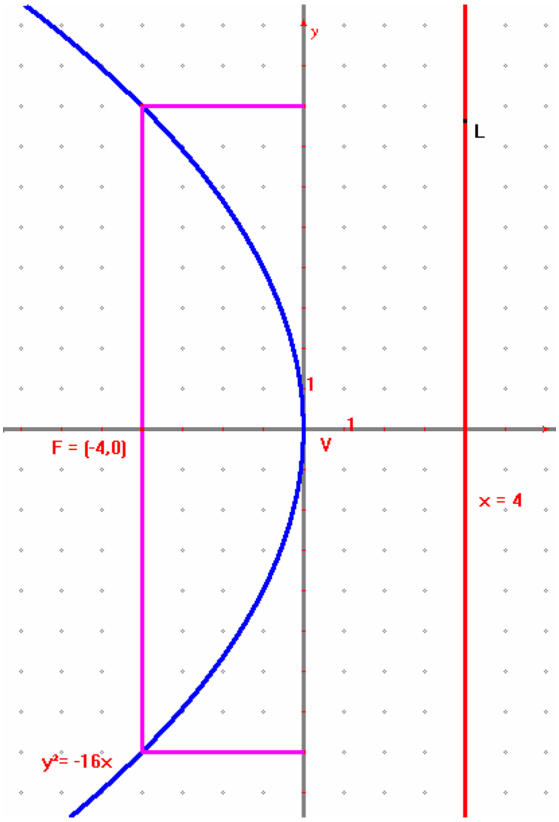
Ejemplos:
1.- De la parábola $y^2 = 8x$ obtener las coordenadas del foco, del vértice de los extremos del lado recto y su longitud, la ecuación de la directriz; Bosqueja la gráfica correspondiente.
Resolución:
La ecuación $y^2 = 8x$ es de la forma $y^2 = 4px$ por lo tanto es horizontal con vértice en el origen se abre a la derecha; además la L.l.r. $4p = 8$ $p = 2$ F (p, 0) F (2, 0) y V (0,0).
Las coordenadas de los extremos del lado recto: L (p, ½ l.l.r.) y R (p, - ½ l.l.r.)
L (2, 4) y R (2, - 4)

Ecuación de la directriz: x = - p ***x = - 2***



2.- Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en F (0, 4), traza la grafica.

Solución: Como el foco es F (0, 4) entonces p = 4 y la ecuación de la parábola es $x^2 = 4py$ por lo tanto la ecuación es $x^2 = 4(4)$ y $x^2 = 16y$.
La l.l.r. = 16; la ecuación de la directriz: y = - p y = - 4.



Ejercicios:

F (3, 0)

F (- 4, 0)

F (0, - 3)

3.- Una parábola tiene su vértice en el origen, su eje a lo largo del eje x y pasa por el punto (- 3, 6).Encuentra la ecuación.

Se traza la grafica para determinar hacia donde abre, vemos que abre a la izquierda por lo tanto la ecuación es de la forma $y^2 = -4px$. Para determinar el valor de 4p se sustituyen las coordenadas del punto dado, y se obtiene:

$(6)^2 = - 4p (- 3)$
36 = 12p
p = 36/12 = 3
p = 3
F (- 3, 0)
L.l.r. = 4p = 12
Ecuación de la directriz x = p`   x = 3
Ecuación de la parábola: $y^2 = - 12x$

Ejercicios:

Pasa por (2, 4) eje x.

Pasa por (3, - 4), eje y.

Pasa por (2, 4) eje y.

Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen cuya directriz es x + 4 = 0, grafícala.

Solución: Como la ecuación de la directriz es x = - 4, entonces p = 4 y la ecuación es $y^2 = 4px$ por lo tanto la coordenada del foco es: F (4, 0) y la l.l.r. = 16.

Ejercicios:

Ecuación de la directriz y – 4 = 0

Ecuación de la directriz x – 8 = 0

Ecuación de la directriz y + 12 = 0

Encuentra la ecuación de la parábola cuya l.l.r. es 16 y se abre hacia la derecha.

Solución: Como la ecuación abre a la derecha
la ecuación es $y^2 = 4px$
L.l.r. = 4p = 16   p = 4   F (4, 0)
V (0, 0) Ec. Dir. x = - 4   L (4, 8)   R (4, -8).

Ejercicios:

L.l.r. = 8 abre hacia arriba.

L.l.r. = 12 abre hacia la izquierda.

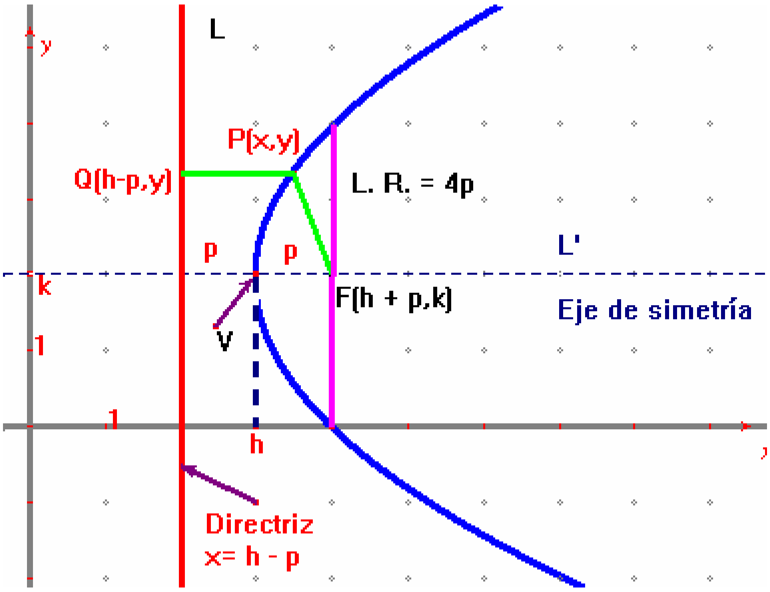
L.l.r. = 20 abre hacia abajo.

4.2.2. Parábolas horizontales y verticales con centro fuera del origen.

- Obtención de los elementos a partir de la ecuación.

- Obtención de la ecuación a partir de los elementos.

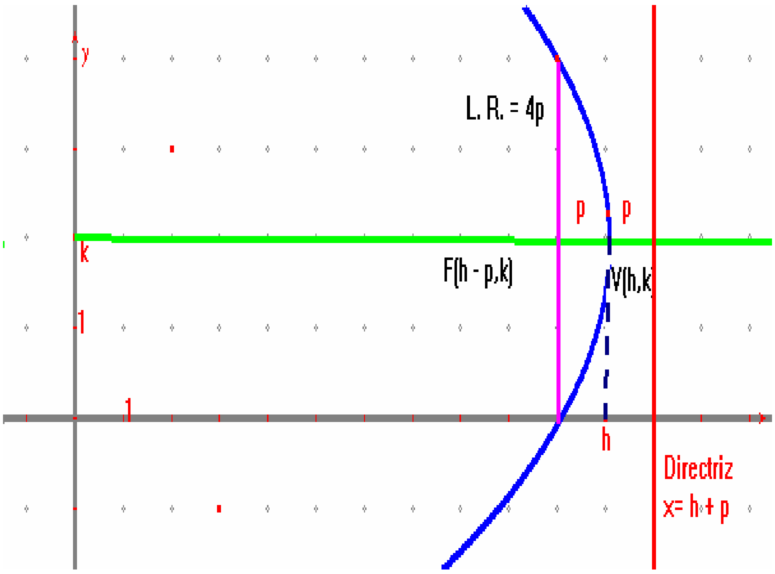
Consideremos ahora una parábola de vértice en el punto (h, k) de eje paralelo al eje x y cuyo foco está a una distancia p del vértice y a la derecha de él. La directriz paralela al eje y a una distancia 2p a la izquierda del foco, la ecuación será:
$(y - k)^2 = 4p(x – h)$ F (h + p, k)   Ec. Dir. x = h – p.



Otras expresiones son:

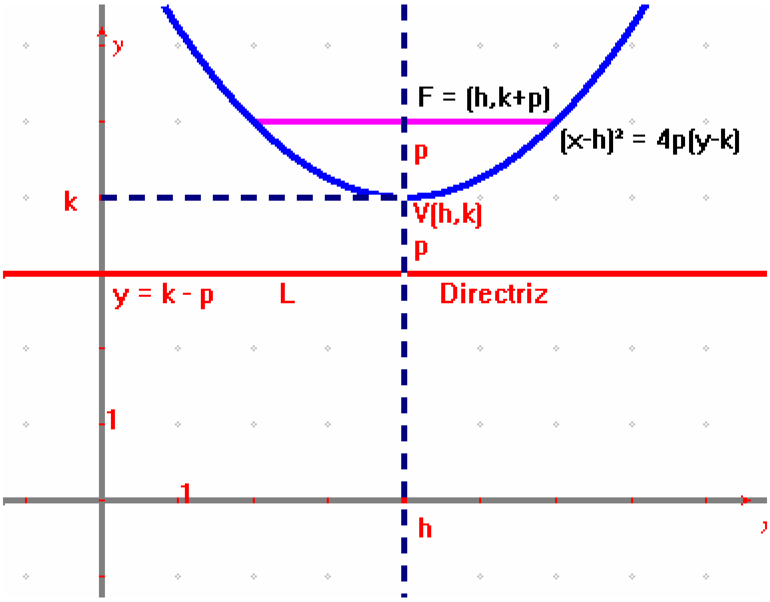
Parábola de eje paralelo al eje x foco a la izquierda del vértice, Ec. de la Dir. paralela al eje y a la derecha del foco, la ecuación será:

$(y - k)^2 = - 4p(x – h)$ F (h - p, k)   Ec. Dir. x = h + p.



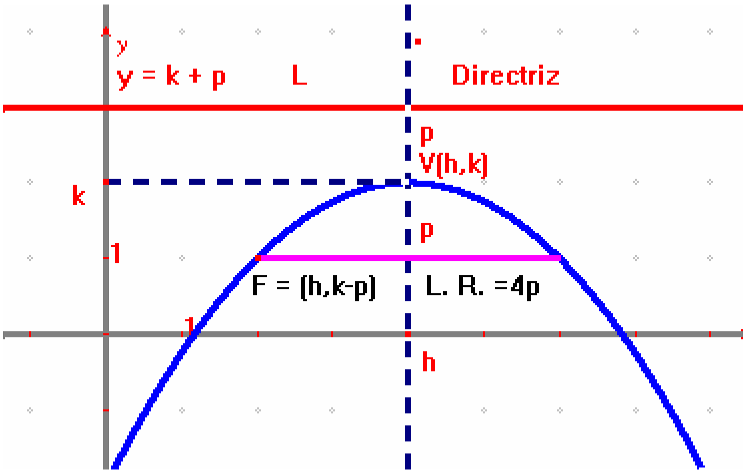
Parábola de eje paralelo al eje y foco arriba del vértice, Ec. de la Dir. paralela al eje x abajo del foco, la ecuación será:

$(x - h)^2 = 4p(y – k)$ F (h, k + p)   Ec. Dir. y = k - p.



Parábola de eje paralelo al eje y foco abajo del vértice, Ec. de la Dir. paralela al eje x arriba del foco, la ecuación será:

$(x - h)^2 = - 4p(y – k)$ F (h, k - p) Ec. Dir. y = k + p.



Ejemplos:

1.- Hallar la ecuación de la parábola de vértice V(3, 2) y foco F(5, 2).

Solución:
Como el vértice es V (3, 2) y foco F (5, 2) entonces p = 5 – 3 = 2, y la ecuación es:

$(y – k)^2= 4p (x – h)$ sustituyendo obtenemos: V (-2, 3) y F (1, 3)
$(Y – 2)^2 = 4(2) (x – 3)$ V (-2, 4) y F (-2, 6)
$y^2 – 4y + 4 = 8x – 24$ Trae. V (2, 5) y F (2, 3)
$y^2 – 4y – 8x + 28 = 0$
L.l.r. = 4p = 4(2) = 8
Ec. Dir. x = 3 – 2 = 1

2.- Hallar la ecuación de la parábola de F (6, -2) y directriz x – 2 = 0.

Solución: Por definición sabemos que la distancia del vértice al foco es la misma que la del vértice a la ecuación de la directriz, por lo tanto obtenemos:

F (4, 6) y directriz y = 2

$$\left(\sqrt{(x-6)^2+(y+2)^2} = x-2\right)^2$$

$$(x-6)^2+(y+2)^2 = (x-2)^2$$

$$x^2-12x+36+y^2+4x+4 = x^2-4x+4$$

F (2, 5) y directriz y – 9 = 0

$$x^2-12x+36+y^2+4x+4-x^2+4x-4 = 0$$

$$y^2+4y-8x+36 = 0$$

Trab. F (3, 2) y directriz x – 4 = 0

3.- Hallar la ecuación de la parábola de vértice el punto V (2, 3), de eje paralelo al de coordenadas y que pase por el punto P (4, 5).

Solución:
Como el vértice es V (2, 3), y el eje es el eje y pasa por P (4, 5), la parábola abre hacia arriba por lo tanto su fórmula es:

$(x – h)^2= 4p (y – k)$ sustituyendo obtenemos:
$(4 – 2)^2 = 4p (5 – 3)$
$(2)^2 = 4p (2)$
$4 = 8p$
$p = 0.5$ entonces:

V (3, - 1) eje y P (6, 10)
Trab. V (- 2, - 3) eje y P (- 4, - 8)

$(x – 2)^2= 4(0.5) (y – 3)$
$x^2 – 4x + 4= 2 (y – 3)$
$x^2 – 4x + 4 = 2y – 6$
$x^2 – 4x – 2y + 10 = 0$

4.3. Ecuación general de la parábola.
4.3.1. Conversión de la forma ordinaria a la forma general.
4.3.2. Conversión de la forma general a la forma ordinaria.

4.-Dada la ecuación $y^2 - 6x + 8y + 4 = 0$, hallar las coordenadas del vértice y del foco, y la ecuación de la directriz.
Solución:

Sumando y restando términos para completar un cuadrado se tiene:

$y^2 + 8y = 6x - 4$
$y^2 + 8y + 16 = 6x – 4 + 16$
$(y + 4)^2 = 6(x + 2)$

V (-2, -4) L.l.r. = 4p = 6 p = 1.5. Luego el foco es el punto de coordenadas F (- 0.5, -4) y la ecuación de la directriz es x = - 3.5

$y^2 - 4y + 6x – 8 = 0$

$x^2 – 4x + 6y + 13 = 0$

5.- Encuentra la ecuación de la parábola con V(4, -2), l.l.r. = 8 y abre a la derecha.

L.l.r.= 4p = 8

p = 2 F(h + p, k) Ec. Dir. x = h – p

F (6, - 2) Ec. Dir. x = 2

$(y + k)^2 = 4p(x - h)$
$(y + 2)^2 = 4(2)(x - 4)$
$y^2 + 4y + 4 = 8x – 32$
$y^2 + 4y – 8x + 4 + 32 = 0$
$y^2 + 4y - 8x + 36 = 0$

V(1, 2), l.l.r. = 8 y abre hacia abajo.

V (-2, - 1), l.l.r. = 16 y abre hacia la izquierda.

6.- Encuentra la ecuación de la parábola con vértice V (3, - 2) y extremos de la l.l.r. L (- 2, 0.5) y R (8, 0.5).

Solución: Se traza la gráfica para determinar hacia donde abre, vemos que abre hacia arriba. A partir de los extremos de la i.e. se obtiene: L.l.r. = 10 = 4p p = 2.5 sustituyendo en la ecuación obtenemos:

$(x – h)^2= 4p (y – k)$
$(x – 3)^2= 4(2.5) (y – (- 2))$
$x^2 – 6x + 9= 10 (y + 2)$
$x^2 – 6x + 9 = 10y + 20$
$x^2 – 6x – 10y - 11 = 0$

Ejercicios:

V (2, 1) y extremos de la l.l.r. L (- 1, - 5) y R (-1, 7)

V (- 3, - 4) y extremos de la l.l.r. L (- 7, - 6) y R (1, - 6)

7.- Hallar la ecuación de la parábola de eje paralelo al de coordenadas x y que pase por los puntos (-2, 1), (1, 2) y (-1, 3)

Solución: Sustituyendo estos puntos en la ecuación general de la parábola tenemos:

$y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$(1)^2 + D (-2) + E (1) + F = 0$
$-2D + E + F = -1$

$(2)^2 + D (1) + E (2) + F = 0$
$D + 2E + F = - 4$

$(3)^2 + D (-1) + E (3) + F = 0$
$- D + 3E + F = - 9$

$-2D + E + F = -1$
$D + 2E + F = - 4$
$- D + 3E + F = - 9$

$-2D + E + F = -1$

$2D – E = 5$

$2(0.4) – E = 5$
$E = - 5 + 0.8$
$E = - 4.2$

$D + 2E + F = - 4$
$(0.4) + 2(-4.2) + F = -4$
$F = - 4 – 0.4 + 8.4$
$F = 4$

$y^2 + 0.4x – 4.2y + 4 = 0$

(4, 5), (- 2, 11) Y (-4, 21) eje y.

$(D + 2E + F = -4)\ {-1}$

$-2D + E + F = -1$ Trab. $(-2, 3)$, $(-2, 1)$ Y $(10, 9)$ eje y.

$\underline{-D - 2E - F = 4}$

$-3D - E = 3$

$D + 2E + F = -4$

$\underline{(-D + 3E + F = -9)\ -1}$

$D + 2E + F = -4$

$D - 3E - F = 9$

$2D - E = 5$

$\underline{(-3D - E = 3)\ {-1}}$

$2D - E = 5$

$3D + E = -3$

$5D = 2$

$D = 2/5 = 0.4$