3.5 La ley de los Senos – La ley de los Cósenos

Hay dos leyes –una responde a los senos, la otra responde a los cósenos. En esta sección verás cómo estas leyes expanden las herramientas de una persona para resolver problemas de medidas.

En el *ABC* de la Figura 3.63, donde todos los ángulos son agudos, una perpendicular se deja caer desde *C* al segmento *AB*.

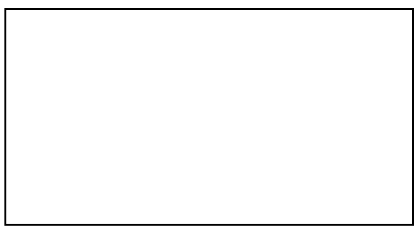

Figura 3.63

La letra *P* es usada para indicar el punto de intersección de esta perpendicular y el segmento *AB*. Observa que

$$\text{seno } A = \frac{CP}{b}$$

y al multiplicarlo cruzadamente tienes

$$b \text{ seno } A = CP$$

1. Muestra que

$$\boldsymbol{a} \textbf{ seno } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{CP}$$

2. Explica por qué

$$\boldsymbol{b} \textbf{ seno } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} \textbf{ seno } \boldsymbol{B}$$

3. Explica cómo usamos los resultados del ejercicio 2 para obtener

$$\frac{\textbf{seno } \boldsymbol{A}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\textbf{seno } \boldsymbol{B}}{\boldsymbol{b}}$$

Logros del aprendizaje

Después de estudiar esta sección podrás:

Explicar la Ley de los Senos

Usar la Ley de los Senos en la solución de problemas de medidas

Explicar la Ley de los Cósenos

Usar la Ley de los Cósenos en la solución de problemas de medidas.

4. **Usando un proceso semejante al de arriba, muestra que**

$$\frac{\text{seno } \boldsymbol{A}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\text{seno } \boldsymbol{C}}{\boldsymbol{c}}$$

5. **Explica por qué**

$$\frac{\text{seno } \boldsymbol{A}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\text{seno } \boldsymbol{B}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\text{seno } \boldsymbol{C}}{\boldsymbol{c}}$$

La ecuación en el problema 5 es conocida como la **Ley de Senos**. Esta ley puede ser una gran ayuda para obtener medidas en los triángulos donde alguna información es conocida. Los siguientes ejercicios te ayudarán a demostrar esta idea:

1. **En el triángulo de la Figura 3.64, encuentra la longitud de *AC*, la longitud de *AB* y la medida del $\angle ACB$.**

Figura 3.64

2. **En el triángulo de la Figura 3.65, encuentra las medidas de los ángulos en *C* y en *A*.**

Figura 3.65

Muy bien. Tienes la idea de la Ley de Senos. Ahora veamos otra ley. Esta tiene que ver con los cósenos.

Ustedes están familiarizados con el Teorema de Pitágoras, el cual afirma que cualquier triángulo rectángulo, como se muestra en la Figura 3.66, $a^2 + b^2 = c^2$.

Figura 3.66

Nuestro objetivo es encontrar qué sucede si mantenemos las longitudes *a* y *b* iguales, pero cambiamos el ángulo recto en *C* a un ángulo agudo. Claramente, la longitud *c* ha cambiado, digamos a *d* (Figura 3.67).

Figura 3.67

Usando una regla y un transportador, dibuja un triángulo rectángulo 3-4-5 (Figura 3.68(a)). Ahora, manteniendo los lados 3 y 4 con la misma longitud, dibuja otro triángulo con el ángulo recto cambiado a uno que es menor de 90º (Figura 3.68(b)). Mide la longitud *d* tan cuidadosamente como puedas. ¿Cómo compara d^2 con $3^2 + 4^2$?

Figura 3.68

En general, cuando uno cambia de

a

no esperamos que $a^2 + b^2$ iguale a d^2. Ciertamente, uno debería esperar que

$$d^2 < a^2 + b^2$$

Los matemáticos pensaron sobre esto y dijeron: "Muy bien, así que d^2 es más pequeño que $a^2 + b^2$, pero d^2 sumado a algún número debe igualar $a^2 + b^2$. Eso es,

$$d^2 + (\text{algún número}) = a^2 + b^2$$

Según cambiamos el ángulo en *C*, 'algún número' cambiará también, pero probablemente hay un patrón." Veamos si podemos encontrar dicho patrón.

En la Figura 3.69, observa que la perpendicular se dejó caer desde B al lado AC, el punto de la intersección marcado como el punto P. El ángulo agudo en C será denominado θ.

Figura 3.69

1. **Explica por qué $d^2 = (AP)^2 + (BP)^2$.**
2. **Explica por qué $BP = a$ seno θ.**
3. **Explica por qué $PC = a \cos \theta$.**
4. **Muestra que $AP = b - a \cos \theta$.**
5. **Usando los resultados en 1, 2 y 4 de arriba, muestra que $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$.**

(*Pista*: seno^2 θ + cos^2 $\theta = 1$)

Del resultado en el problema 5 de arriba tenemos

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

o

$$d^2 + 2ab \cos \theta = a^2 + b^2$$

Lo encontramos. El número que falta o (algún número) ya no es un misterio. Ese número es

$$2ab \cos \theta$$

Recuerda, solamente conseguimos este número para un ángulo agudo. Más tarde verás que el mismo número funciona con *cualquier* ángulo. Este resultado es conocido como la **Ley de Cósenos** y es generalmente escrito en la forma

$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$, donde d es el lado opuesto a θ.

Los siguientes ejercicios están diseñados para ayudarte a familiarizarte con la Ley de Cósenos:

1. **En el triángulo de la Figura 3.70, encuentra la longitud del lado *BC*.**

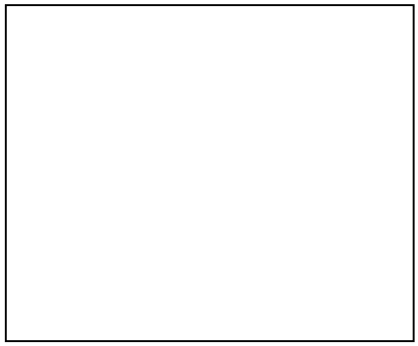

Figura 3.70

2. **En el triángulo de la Figura 3.71, encuentra la medida del ángulo en *A*. (*Pista:* Haz uso de $\cos^{-1}$.)**

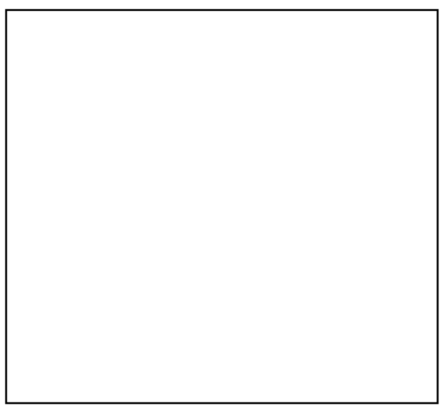

Figura 3.71

Se espera que comiences a ver el poder de la Ley de Senos y la Ley de Cósenos. Obviamente, podrías solucionar los problemas de medidas, literalmente yendo a través de la prueba de estas leyes cada vez que una sea necesaria. Sin embargo, las afirmaciones de estas leyes te permiten que sobrepases ese trabajo y ofrece herramientas poderosas para solucionar muchos problemas de medidas.

Conjunto de ejercicios: 3.5

1. Dos embarcaciones salen de la bahía de Boston. El ángulo entre sus rutas es 43º. Una embarcación está viajando a un ritmo de 35 millas por hora, y la otra embarcación está viajando a un ritmo de 25 millas por hora. Al cabo de dos horas, ¿cuál es la distancia entre las dos embarcaciones?

2. Un vuelo de Houston a Cincinnati, una distancia de 1,029 millas, encuentra una violenta tormenta inmediatamente después de despegar y cambia su curso por 22.5º. Después de volar fuera de curso durante 400 millas, ¿cuán lejos de Cincinnati está el avión (Figura 3.72)?

miles = millas

Figura 3.72

3. En el triángulo de la Figura 3.73, encuentra la medida del ángulo en *B*, la longitud de *AB*, y la longitud de *AC*.

Figura 3.73

4. Hay tres botes en las afueras de la costa de Long Beach, California. El capitán del bote *M* sabe que el bote *N* está a 4.5 millas de distancia y que el bote *P* está a 5.3 millas de distancia. El ángulo entre los dos avistamientos es 40º (Figura 3.74).
   - **(a)** ¿Cuán lejos están los botes *N* y *P* uno del otro?
   - **(b)** El capitán se da cuenta que cometió un error calculando el ángulo entre los dos avistamientos. Debería haber calculado 32º. Usando este ángulo, ¿cuán lejos están los botes *N* y *P* uno del otro?

PHOTO

boat = bote

miles = millas

Angle between sightings = Ángulo entre avistamientos

Figura 3.74

5. **(a)** Un diamante de béisbol de las Grandes Ligas es un cuadrado de 90 pies. El montículo del lanzador se encuentra a 60.5 pies del plato. ¿Cuán lejos está el montículo del lanzador de la primera base?

(b) Un diamante de béisbol de las Pequeñas Ligas es un cuadrado de 60 pies. El montículo del lanzador se encuentra a 46 pies del plato. ¿Cuán lejos está el montículo del lanzador de la primera base?

6. El techo de un edificio grande está inclinado a un ángulo de 1.5º de la horizontal. Anteriormente se instaló una torre de antena en el techo en una posición vertical. Una persona que está a 100 pies de la base de la torre observa que el techo forma un ángulo de 24º con la cima de la torre (Figura 3.75). ¿Cuán alta, en pies, está la torre?

roof = techo

antenna tower = torre de la antena

Figura 3.75

7. Roland y Laura se encuentran separados 500 pies observando un globo en el cielo que está entre ellos y en el mismo plano vertical con ellos. Roland estima que el globo, visto desde donde él se encuentra, forma un ángulo de 75º con el suelo. Desde donde ella se encuentra, Laura estima que el globo forma un ángulo de 50º con el suelo. Estima la altura del globo.