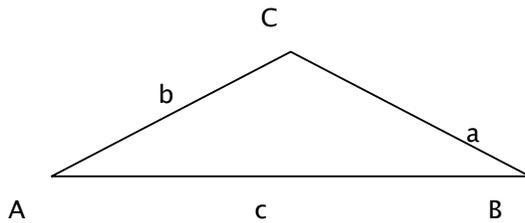


--	--	--	--	--	--	--

### TRIANGULOS OBLICUANGULOS

Se llaman oblicuángulos por que los lados son oblicuos con relación uno al otro, no formando nunca ángulos rectos.

Hay seis elementos fundamentales en un triángulo: los tres lados y los tres ángulos, en este caso representaremos los ángulos respectivamente por las mayúsculas A,B,C y los lados opuestos por a,b,c.



### LEY DE LOS SENOS

“En cualquier triángulo, la razón entre el seno de un ángulo y el lado opuesto a ese ángulo es igual a la razón entre el seno de otro ángulo y el lado opuesto a ese ángulo”

$$\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C}$$

La ley de los senos consta de las siguientes tres formulas:

$$1.- \frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B}$$

$$2.- \frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{c}{\text{Sen}C}$$

$$3.- \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C}$$

Para aplicar cualquiera de las formulas anteriores a un triangulo especifico, debemos conocer los valores de tres de las cuatro variables, si sustituys estos tres valores en la formula apropiada, podrás despejar el valor de la cuarta variable.

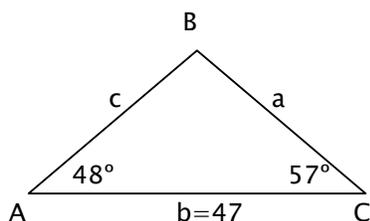
Se deduce que la ley de los senos se puede usar para hallar las partes restantes de un triangulo oblicuo siempre que se conozcan cualquiera de las siguientes dos condiciones:

- 1.- dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos (LLA)
- 2.- dos ángulos y cualquier lado (AAL o ALA)

Uso de la ley de los senos:

**Caso (ALA) Dos ángulos y cualquier lado**

Resuelve  $\triangle ABC$  dados  $A = 48^\circ$ ,  $C = 57^\circ$  y  $b = 47$



Solución:

1.- Recuerda que la suma de los ángulos interiores de un triangulo es igual a  $180^\circ$ , por lo tanto:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$48^\circ + \angle B + 57^\circ = 180^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ - 48^\circ - 57^\circ$$

$$\angle B = 75^\circ$$

2.- Dado que se conocen el lado b y los tres ángulos, se puede encontrar "a" usando una forma de la ley de los senos donde intervengan a, A, b y B:

$$\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} \quad \text{Ley de los senos}$$

$$a = \frac{b(\text{sen}A)}{\text{Sen}B} \quad \text{Despejar "a"}$$

$$a = \frac{47(\text{sen}48^\circ)}{\text{Sen}75^\circ} \quad \text{Sustituir b, A y B} \quad a = \frac{47(0.743)}{0.965} = \frac{34.92}{0.965} = 36$$

$$a = 36 \quad \text{Resultado}$$

Para hallar c, basta sustituir en:

$$\frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C}$$

$$c = \frac{b(\text{sen}C)}{\text{Sen}B}$$

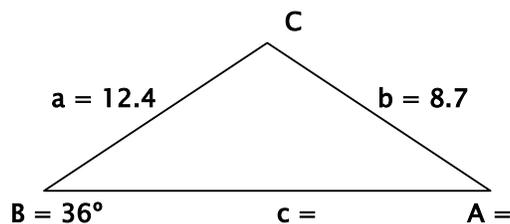
$$c = \frac{47(\text{sen}57^\circ)}{\text{Sen}75^\circ} = \frac{47(0.838)}{0.965} = \frac{39.386}{0.965} = 41$$

$$c = 41$$

**Caso (LLA) dos lados y un ángulo opuesto a ellos:**

Resuelve el  $\Delta$  ABC dados  $a = 12.4$  ;  $b = 8.7$  y  $B = 36^\circ$ .

Hallar  $\angle A$  y se procede de la siguiente manera:



1.- Determinar un segundo ángulo:

Ley de los Senos  $\frac{\text{Sen}A}{a} = \frac{\text{Sen}B}{b}$

Despejar Sen A  $\text{Sen}A = \frac{a(\text{sen}B)}{b}$

Sustituir a, b, B  $\text{Sen}A = \frac{12.4(\text{sen}36^\circ)}{8.7} = \frac{12.4(0.587)}{8.7}$

Resultado  $\frac{7.288}{8.7} = 0.837$

Sen A =  $57^\circ$

2.- Por el teorema que señala que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a  $180^\circ$  determinar el valor del ángulo C:

∴

$$C = 180^\circ - 57^\circ - 36^\circ = 87^\circ$$

3.- Por Ley de senos determinar la medida del lado restante:

$$\frac{c}{\text{Sen}C} = \frac{b}{\text{Sen}B} \Rightarrow \frac{c}{\text{Sen}87^\circ} = \frac{8.7}{\text{Sen}36^\circ} =$$
$$c = \frac{8.7(\text{Sen}87^\circ)}{\text{Sen}36^\circ} = \frac{8.7(.9986)}{.5877} = \frac{8.688}{.5877} = 14.78$$
$$c = 14.78$$

### LEY DE LOS COSENOS

"El cuadrado de la longitud de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de las longitudes de los mismos lados por el coseno del ángulo entre ellos"

De donde:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

La cual aplicaremos en la solución de triángulos oblicuángulos en cualquiera de los siguientes casos:

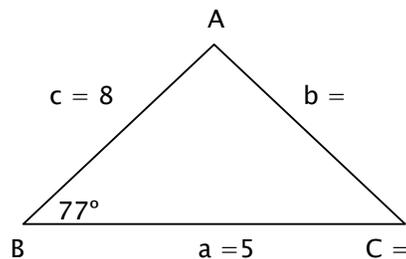
1.- Dos lados y el ángulo entre ellos (LAL)

2.- Tres lados (LLL)

Nota: Dados dos lados y el ángulo incluido de un triángulo, podemos usar la ley de los cosenos para hallar el tercer lado y recurrimos a la ley de los senos para encontrar otro ángulo del triángulo.

Ejemplo: Uso de la ley de los cosenos (LAL)

Calcular las partes restantes del  $\Delta ABC$  si  $a = 5$ ;  $c = 8$  y  $B = 77^\circ$



1.- Como B es el ángulo entre los lados a y c, empezar por calcular b (lado opuesto a B) utilizando la ley de los cosenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad \text{ley de los cosenos}$$

$$b^2 = (5.0)^2 + (8.0)^2 - 2(5.0)(8.0) \cos 77^\circ \quad \text{Sustituimos a, c y B}$$

$$b^2 = 25 + 64 - 80(0.225) \quad \text{Simplificamos y calculamos}$$

$$b^2 = 89 - 18$$

$$b^2 = 71 \quad b = \sqrt{71} = 8.4$$

2.- Encontrar otro ángulo del triángulo mediante la ley de los senos, hallar "A", puesto que es el ángulo opuesto al lado más corto, el cual es a:

Ley de los senos 
$$\frac{\text{Sen}A}{a} = \frac{\text{Sen}B}{b}$$

Despejar seno de A 
$$\text{Sen}A = \frac{a(\text{sen}B)}{b}$$

Sustituir a, b, B 
$$\text{Sen}A = \frac{5(\text{sen}77^\circ)}{8.4} = \frac{5(0.974)}{8.4}$$

Por lo que: 
$$\text{Sen}A = \frac{5(0.974)}{8.4} = \frac{4.87}{8.4} = 0.579$$

$$A = \text{Sen}^{-1} 0.579 = 35^\circ$$

3.- Finalmente determinamos a C: Recordar que  $A + B + C = 180^\circ$

Por lo tanto:  $C = 180^\circ - 77^\circ - 35^\circ = \underline{68^\circ}$

#### Uso de la ley de los Cosenos (LLL)

Dados los tres lados de un triángulo, se puede usar la ley de los cosenos para hallar cualquiera de los ángulos. **Siempre encontraremos primero el ángulo más grande, es decir, el ángulo opuesto al lado más largo, ya que esto garantiza que los ángulos restantes sean agudos**

Posteriormente se puede encontrar otro ángulo aplicando la ley de los senos o la ley de los cosenos.

Ejemplo: Si un  $\triangle ABC$  tiene lados  $a = 90$ ,  $b = 70$  y  $c = 40$ , calcular A, B, C.

1.- De acuerdo con la información previa, primero se encuentra el ángulo opuesto al lado más largo que es "a", por lo tanto se escoge la forma de la ley de los cosenos donde aparece "A" y se procede como sigue:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{Ley de los cosenos}$$

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2 \quad \text{Despejar cos A}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{70^2 + 40^2 - 90^2}{2(70)(40)} \quad \text{Sustituir y simplificar}$$

$$\cos A = \frac{4900 + 1600 - 8100}{5600} = \frac{-1600}{5600}$$

$$\cos A = -\frac{2}{7} = (-0.2857)$$

$$A = \cos^{-1} \left(-\frac{2}{7}\right) = (-0.2857) = 106.6^\circ = 107^\circ$$

2.- Podemos usar la ley de los cosenos para hallar el ángulo B:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad \text{Ley de los cosenos}$$

$$2ac \cos B + b^2 = a^2 + c^2 - b^2 \quad \text{Despejar CosB}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{Sustituir y simplificar}$$

$$\cos B = \frac{90^2 + 40^2 - 70^2}{2(90)(40)} = \frac{8100 + 1600 - 4900}{7200} = \frac{9700 - 4900}{7200} = \frac{4800}{7200}$$

$$B = \cos^{-1} \left(\frac{2}{3}\right) = 0.666 = 48.2^\circ = 48^\circ$$