



RAZONES Y PROPORCIONES

1. Razón

Cuando comparemos 2 magnitudes mediante una división diremos que esas 2 magnitudes se encuentran en una **razón**. Por ejemplo, sean a y b dos cantidades, entonces una razón entre a y b es

$$a : b = \frac{a}{b}, \text{ y lo leeremos } a \text{ es a } b.$$

Ejemplo 1 *Supongamos que se realizó una encuesta entre los jóvenes entre 18 y 21 años cuya conclusión es: "1 de cada 5 jóvenes está inscrito en el Registro Electoral". Entonces, podemos decir que la razón entre los que votan y el total de jóvenes es 1 : 5. También podemos decir que la razón entre los que votan y los que no, es 1 : 4.*

Como vimos antes, ya que las razones son números racionales, entonces podemos amplificarla y simplificarla como nosotros queramos mientras se mantenga la razón.

Ejemplo 2 *Supongamos que queremos expresar los no votantes del ejemplo anterior con respecto al total. Entonces podemos hacerlo de todas estas formas*

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15} = \frac{16}{20} = \dots = \frac{4k}{5k}.$$

Dentro de la PSU, hay muchas razones en los enunciados, por lo tanto, es vital poder manejarlas con facilidad. Veamos más casos.

Ejemplo 3 *Las edades de 2 personas están en la razón 4 : 7. ¿Qué edad tiene cada una si la diferencia de sus edades es de 15 años?*

Digamos que la primera persona tiene $4k$ años, para algún $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, la segunda persona tendrá $7k$ años. Luego, como la diferencia de sus edades es 15 años, entonces $15 = 7k - 4k = 3k$ de donde podemos concluir que $k = 5$. Por lo tanto, las edades de las personas son 20 y 35 años, respectivamente.

Ejemplo 4 *Un ángulo de 90° es dividido en 3 ángulos que se encuentran en la razón 4 : 5 : 9, ¿Cuál es la medida de los ángulos?*

Llamemos α, β y γ a los ángulos. Digamos que $\alpha = 4k^\circ$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, $\beta = 5k^\circ$ y finalmente $\gamma = 9k^\circ$. Luego, como deben sumar 90° , entonces $90 = 9k + 5k + 4k = 18k$ de donde podemos concluir que $k = 10$. Por lo tanto, las medidas de los ángulos son $20^\circ, 25^\circ$ y 45° , respectivamente.



2. Proporciones

Cuando tengamos 2 razones igualadas diremos que tenemos una **proporción** entre ambas razones. Por ejemplo, sean a, b, c y d cuatro magnitudes, entonces una proporción entre ambas razones es

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ y lo leeremos "a es a b como c es a d".}$$

Ejemplo 5 *Se sabe que x es a 10 como 12 es a 15, entonces $x = ?$*

Aplicando lo anterior, podemos resumir el problema en la igualdad

$$\frac{x}{10} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 10}{5} = 4 \cdot 2 = 8.$$

2.1. Proporcionalidad Directa

Supongamos que vamos por la carretera camino a Viña del Mar y siempre a 120 km/h. Podemos reconocer 2 variables asociadas a esto: la *distancia* y el *tiempo*. Como sabemos, mientras más tiempo haya transcurrido desde que partimos nuestro viaje, más distancia habremos recorrido, es decir, a medida que aumenta el tiempo, aumenta la distancia. De la misma manera, el tiempo que falta para llegar disminuye a medida que disminuye la distancia entre nosotros y Viña del Mar.

Esta relación se conoce como **proporcionalidad directa**, si una variable aumenta (disminuye), entonces la otra variable también aumenta (disminuye) en la misma proporción.

Ejemplo 6 *En el ejemplo anterior, las variables distancia recorrida y el tiempo transcurrido podemos llevarlas a una tabla para analizar su proporcionalidad.*

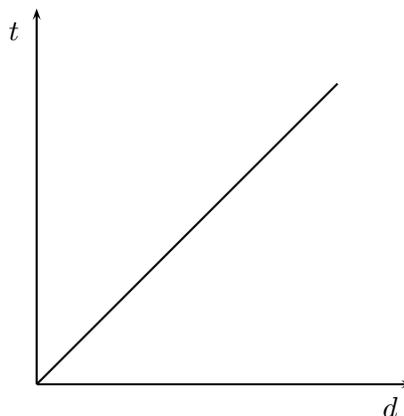
Distancia (km)	Tiempo (hr)
0	0
30	0,25
60	0,5
120	1

La clave de una proporcionalidad directa, es que la razón entre ambas variables se mantenga **constante**. Este valor que se mantiene igual, independiente de como cambien las variables, se conoce como **constante de proporcionalidad**. En el ejemplo del viaje, la constante es igual a 120 y es la definición de velocidad que se estudia en Física.

$$v = \frac{d}{t} = cte.$$



Ojo 1 El **gráfico** que representa a una proporcionalidad directa es una **línea recta que pasa por el origen**, que estudiaremos en profundidad más adelante.



2.2. Proporcionalidad Inversa

Supongamos que queremos pintar una casa y para ello contratamos 2 maestros. Ellos estiman que podrán pintar la casa completamente en 6 días. Como el tiempo no nos pareció adecuado, entonces decidimos contratar 2 maestros más (4 en total) y estiman que podrán pintar la casa en 3 días. Y como aún no nos parece suficiente, contratamos otros 2 maestros (6 en total) que estiman, podrán pintar toda la casa en 2 días lo cual nos parece bien. Podemos reconocer 2 variables asociadas a esto: los *maestros* y el *tiempo*. Claramente, mientras más maestros contratemos, menos tiempo demoraran.

Esta relación se conoce como **proporcionalidad inversa**, si una variable aumenta (disminuye), entonces la otra variable también disminuye (aumenta) en la misma proporción.

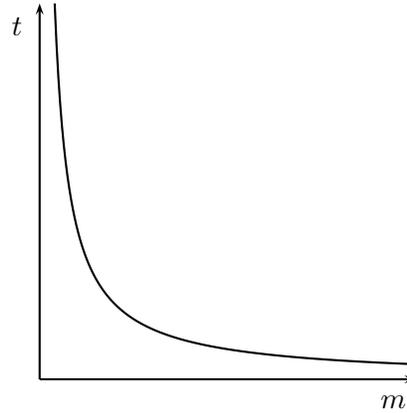
Ejemplo 7 En el ejemplo anterior, las variables maestros contratados y el tiempo que demorarán podemos llevarlas a una tabla para analizar su proporcionalidad.

Maestros	Tiempo (días)
2	6
4	3
6	2

La clave de una proporcionalidad inversa, es que el producto entre ambas variables se mantenga **constante**. En el ejemplo de la casa, la constante es igual a 12.



Ojo 2 El **gráfico** que representa a una proporcionalidad inversa es una **hipérbola**, cuyo estudio va más allá de los contenidos de la PSU.



En resumen, si x e y son dos variables que se encuentran en

- Proporcionalidad Directa, entonces se cumple que

$$\boxed{\frac{x}{y} = k}$$

- Proporcionalidad Inversa, entonces se cumple que

$$\boxed{x \cdot y = k}$$

donde k es la constante de proporcionalidad respectiva.



3. Ejercicios

Sin calculadora. Marcar sólo 1 alternativa.

- Para un terreno de 0,6 km de largo y 200 m de ancho, la razón entre largo y ancho es
 - $3 : 1.000$
 - $3 : 1$
 - $3 : 100$
 - $1 : 3$
 - $0,6 : 2$
- Si $u : v = 3 : 10$ y $u : w = 1 : 2$, entonces ¿cuál de las siguientes alternativas es **falsa**, sabiendo que $v = 30$?
 - $u^2 = 81$
 - $w - v = -12$
 - $\frac{w}{2} = 9$
 - $2w = 36$
 - $u - v = 21$
- Si $a : b = 3 : 5$ y $b : c = 5 : 9$, entonces $a : b : c =$
 - $3 : 9 : 10$
 - $3 : 5 : 9$
 - $5 : 9 : 3$
 - $3 : 9 : 5$
 - $6 : 18 : 5$
- Las edades de tres hermanas: María, Carmen y Lucía, son entre sí como $2 : 5 : 3$. Si sus edades suman 30 años, entonces la edad de Lucía es
 - 15 años.
 - 9 años.
 - 6 años.
 - 3 años.
 - 1 año.



5. Si $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$ y $a + b + c = 36$, entonces $c - b =$

- a) 1
- b) 3
- c) 9
- d) 6
- e) 12

6. A y B son magnitudes directamente proporcionales. Respecto a la siguiente tabla los valores de x e y son, respectivamente,

- a) 7 y 90.
- b) 7 y 60.
- c) 6 y 72.
- d) 8 y 90.
- e) 9 y 54.

A	5	x	15
B	30	42	y

7. Si $2x$ varía directamente con \sqrt{y} e $y = 4$ cuando $x = 3$, entonces ¿cuál es el valor de $2x$ cuando $y = 16$?

- a) $\frac{1}{12}$
- b) $\frac{1}{3}$
- c) 3
- d) 6
- e) 12



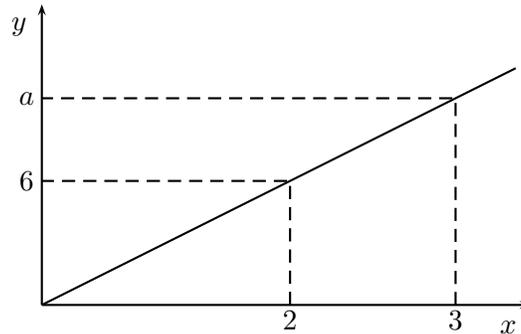
8. Si $x : y = -15$, entonces los valores de x e y , respectivamente, pueden ser:

- I) -15 y -1 .
- II) -15 y 1 .
- III) 105 y -7 .

- a) Sólo I
- b) Sólo II
- c) Sólo III
- d) Sólo II y III
- e) I, II y III

9. Según el gráfico, si x e y son magnitudes directamente proporcionales. Entonces, ¿cuál es el valor de a ?

- a) $\frac{1}{3}$
- b) 3
- c) 6
- d) 9
- e) 12



10. Si p, q y r son enteros positivos tales que $p : q = 2 : 1$ y $q : r = 2 : 1$, entonces ¿cuál(es) de las aseveraciones siguientes es (son) verdadera(s)?

- I) $p > r$
- II) $q < r$
- III) $q > p$

- a) Sólo I
- b) Sólo II
- c) Sólo I y II
- d) Sólo II y III
- e) I, II y III



-
11. Dos obreros, A y B , reciben como pago por un trabajo \$275,000. Si A trabajó 2 días y B trabajó 3 días, ¿cuánto le toca a cada uno, respectivamente?
- a) \$137.500 y \$137.500.
 - b) \$91.666 y \$183.334.
 - c) \$55.000 y \$220.000.
 - d) \$110.000 y \$165.000.
 - e) Ninguna de las anteriores.
12. Si $a : b = 1 : 2$ y $b : c = 3 : 2$, entonces cuando $a = 3$, $c =$
- a) 3
 - b) 4
 - c) 6
 - d) 8
 - e) 9
13. Las cantidades a^2 y b son inversamente proporcionales. Si para $a = 2$, se obtiene $b = 3$, entonces ¿cuál sería el valor de a , asociado a $b = 1, \bar{3}$?
- a) $\frac{1}{2}$
 - b) $\frac{2}{3}$
 - c) $\frac{3}{4}$
 - d) $\frac{3}{2}$
 - e) 3
14. En una guarnición hay 4.800 soldados con alimentos para 48 días. Si la dotación disminuyera a 3.200 hombres, ¿para cuántos días alcanzarían los alimentos?
- a) 80
 - b) 72
 - c) 64
 - d) 60



- e) 32
15. Si 10 obreros construyen una casa en 6 meses, ¿cuánto tiempo se demorarían 12 obreros en construir una casa similar, trabajando el mismo número de horas al día?
- a) 7 meses y 6 días.
 - b) 6 meses y 6 días.
 - c) 5 meses.
 - d) 4 meses y 24 días.
 - e) 4 meses y 12 días.
16. Dada la sucesión de números 60, 30, 20, 15, 12, ... ¿Cuál es el siguiente término?
- a) 10.
 - b) 9.
 - c) 6.
 - d) 12.
 - e) 8.
17. Una ciudad A dista 50 km de una ciudad B . Se puede determinar cuánto demora una persona en ir desde A a B si:
- (1) El primer día camina 10 km..
 - (2) Camina a razón de 10 km diarios.
- a) (1) por sí sola.
 - b) (2) por sí sola.
 - c) Ambas juntas, (1) y (2).
 - d) Cada una por si sola, (1) ó (2).
 - e) Se requiere información adicional.



18. En un curso la relación de niñas a niños es de 8 a 7, respectivamente. Se puede determinar el número de niñas si:
- (1) La razón de los que estudian y no estudian es 4 a 1.
 - (2) Las niñas que no estudian son 6, y todos los niños estudian.
- a) (1) por sí sola.
 - b) (2) por sí sola.
 - c) Ambas juntas, (1) y (2).
 - d) Cada una por si sola, (1) ó (2).
 - e) Se requiere información adicional.
19. Se puede conocer el valor de x cuando $y = 6$ si:
- (1) x e y están en directa proporción.
 - (2) $x = 3$ cuando $y = 4$.
- a) (1) por sí sola.
 - b) (2) por sí sola.
 - c) Ambas juntas, (1) y (2).
 - d) Cada una por si sola, (1) ó (2).
 - e) Se requiere información adicional.
20. Se puede conocer la distancia real entre dos pueblos A y B si:
- (1) En un mapa se encuentran 5 cm.
 - (2) El mapa está dibujado en una escala de 1 : 100.000.
- a) (1) por sí sola.
 - b) (2) por sí sola.
 - c) Ambas juntas, (1) y (2).
 - d) Cada una por si sola, (1) ó (2).
 - e) Se requiere información adicional.

1 B	2 E	3 B	4 B	5 D
6 A	7 E	8 D	9 D	10 A
11 D	12 B	13 E	14 B	15 C
16 A	17 B	18 C	19 C	20 C