MATEMÁTICAS BÁSICAS

RECTA

DEFINICIÓN DE RECTA

Analíticamente hablando, una recta se define como una ecuación de primer grado en dos variables de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

donde A, B, C son coeficientes numéricos y las variables son x y y.

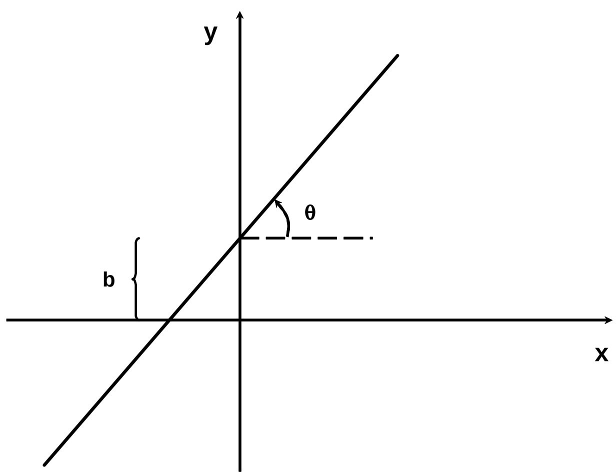
La recta es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que cumplen con la ecuación $Ax + By + C = 0$.

Las características de una recta son la *pendiente* y la *ordenada al origen*.

- La pendiente (m) se define como su grado de inclinación y es la tangente del ángulo (medido en sentido contrario a las manecillas del reloj) que forma la recta con el eje x.

$$m = \tan\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

- La ordenada al origen (b) es la distancia que existe del origen al punto donde la recta cruza al eje y.

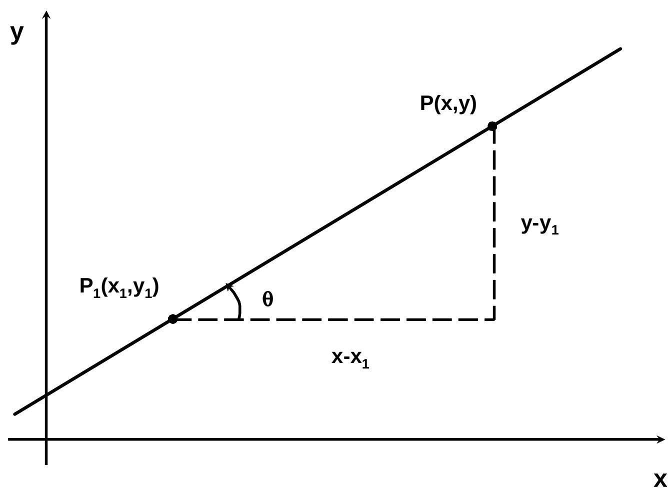


De acuerdo a la figura anterior, una recta es el lugar geométrico de los puntos que poseen una misma pendiente.

FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

PUNTO-PENDIENTE

Dados los puntos $P(x,y)$ y $P_1(x_1,y_1)$ de una recta:



se observa que la pendiente es:

$$m=\tan\theta=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

ahora, si se despeja $y-y_1$ queda:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

que es la ecuación *punto-pendiente* de la recta.

Ejemplos.
Determinar la ecuación de la recta que pase por el punto indicado y con la pendiente dada.

1) Pendiente 6 y que pase por el punto $P(3,-4)$
Solución.

$$y-(-4)=6(x-3)\ \Rightarrow\ y+4=6x-18\ \Rightarrow\ 6x-18-y-4=0\ \Rightarrow 6x-y-22=0$$

2) Pendiente $\frac{5}{3}$ y que pase por el punto $P(-7,-11)$
Solución.

$$y-(-11)=\frac{5}{3}(x-(-7))\ \Rightarrow\ y+11=\frac{5}{3}(x+7)\ \Rightarrow\ 3(y+11)=5(x+7)$$

$$\Rightarrow\ 3y+33=5x+35\ \Rightarrow\ 0=5x+35-3y-33\ \Rightarrow\ 5x-3y+2=0$$

3) Pendiente $-\frac{8}{7}$ y que pase por el punto $\left(-9,\frac{3}{4}\right)$

Solución.

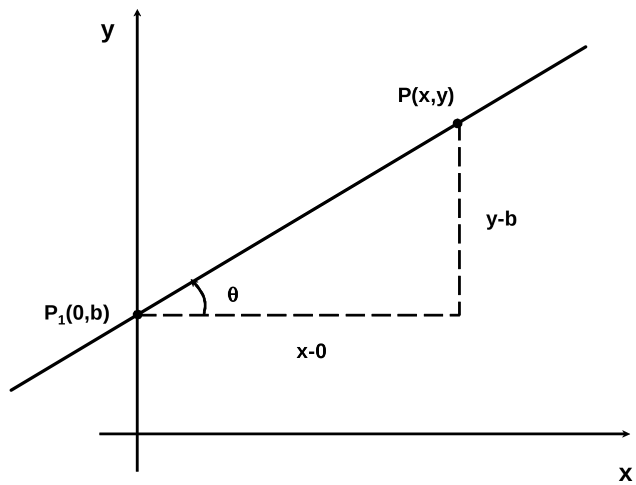
$y-\frac{3}{4}=-\frac{8}{7}(x-(-9)) \Rightarrow y-\frac{3}{4}=-\frac{8}{7}(x+9) \Rightarrow 28\left(y-\frac{3}{4}\right)=28\left(-\frac{8}{7}\right)(x+9)$

$\Rightarrow 28y-21=-32(x+9) \Rightarrow 28y-21=-32x-288 \Rightarrow 32x+288+28y-21=0$

$\Rightarrow 32x+28y+267=0$

PENDIENTE-ORDENADA AL ORIGEN

Si en el caso anterior, el punto P_1 se desplaza hasta que coincida con el eje y, se tiene:



Se advierte que el punto $P_1(x_1,y_1)$ se convierte en $P_1(0,b)$, donde b es la ordenada al origen.

Para este caso la pendiente es: $m=\frac{y-b}{x-0}$

ahora, si se despeja $y-b$: $y-b=m(x-0) \Rightarrow y-b=mx$, es decir:

$$y=mx+b$$

que es la ecuación *pendiente-ordenada al origen* de la recta.

Ejemplos.
Determinar la ecuación de la recta con la pendiente y su respectiva ordenada al origen dadas

1) Pendiente 4 y ordenada al origen -8
Solución.

$y=4x+(-8) \Rightarrow y=4x-8 \Rightarrow 0=4x-8-y \Rightarrow 4x-y-8=0$

2) Pendiente $-\frac{6}{7}$ y con ordenada al origen -10

Solución.

$$y=-\frac{6}{7}x+(-10)$$

multiplicando por 7:

$$7y=-6x-70 \quad\Rightarrow\quad 6x+7y+70=0$$

3) Pendiente $-\frac{5}{2}$ y con ordenada al origen $-\frac{13}{5}$

Solución.

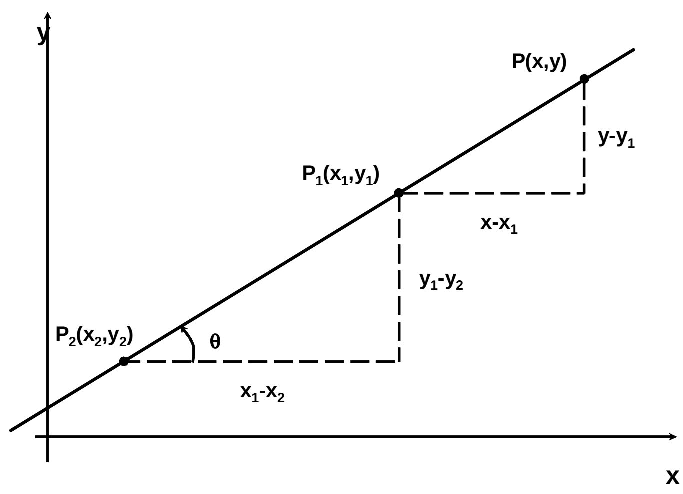
$$y=-\frac{5}{2}x+\frac{13}{5}$$

multiplicando por 10:

$$10y=-25x+26 \quad\Rightarrow\quad 25x+10y-26=0$$

DOS PUNTOS (CARTESIANA)

Dados los puntos $P(x,y)$, $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ de una recta:



se observa que la pendiente que une a los puntos P y P_1 es: $m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$

y que la pendiente que une a los puntos P_1 y P_2 es: $m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

pero como la pendiente es la misma se pueden igualar: $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$, que equivale a:

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$$

que es la ecuación conocida como de *dos puntos* o *cartesiana* de la recta.

Ejemplos.
Determinar la ecuación de la recta que pase por los puntos dados

1) $P_1(3,5)$ y $P_2(8,7)$
Solución.
$$\frac{y-5}{x-3}=\frac{5-7}{3-8}=\frac{-2}{-5}=\frac{2}{5}$$
multiplicando de forma cruzada:
$$5(y-5)=2(x-3) \Rightarrow 5y-25=2x-6 \Rightarrow 0=2x-6-5y+25 \Rightarrow 2x-5y+19=0$$

2) $P_1(-4,9)$ y $P_2(2,-11)$
Solución.
$$\frac{y-9}{x-(-4)}=\frac{9-(-11)}{-4-2}=\frac{20}{-6}=\frac{10}{-3}$$
multiplicando de forma cruzada:
$$-3(y-9)=10(x+4) \Rightarrow -3y+27=10x+40 \Rightarrow 0=10x+40+3y-27$$
$$\Rightarrow 10x+3y+13=0$$

3) $P_1\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{5}\right)$ y $P_2\left(-\frac{13}{6},9\right)$
Solución.
$$\frac{y-\left(-\frac{2}{5}\right)}{x-\frac{1}{3}}=\frac{-\frac{2}{5}-9}{\frac{1}{3}-\left(-\frac{13}{6}\right)}=\frac{-\frac{47}{5}}{\frac{15}{6}}=\frac{-282}{75}$$
multiplicando de forma cruzada:
$$75\left(y+\frac{2}{5}\right)=-282\left(x-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow 75y+30=-282x+94 \Rightarrow 282x-94+75y+30=0$$
$$\Rightarrow 282x+75y-64=0$$

SIMÉTRICA

Si la recta cruza a los ejes coordenados en los puntos $P_1(a,0)$ y $P_2(0,b)$, se puede aplicar la ecuación cartesiana de la recta: $\frac{y-0}{x-a}=\frac{0-b}{a-0}=\frac{-b}{a}$

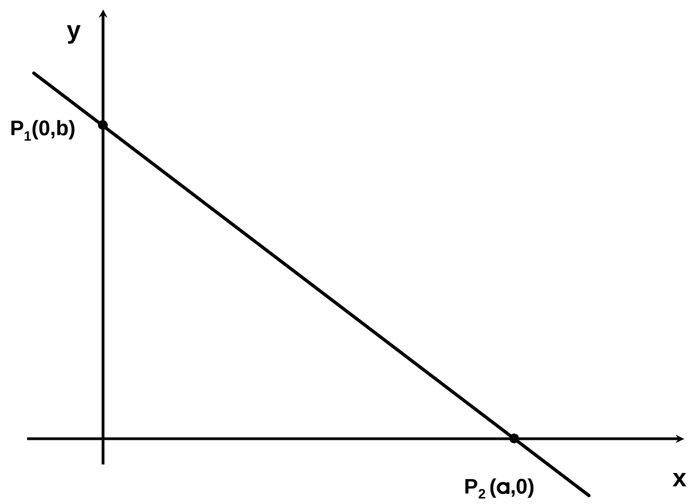
multiplicando de forma cruzada: $ay=-b(x-a) \Rightarrow -bx+ba \Rightarrow bx+ay=ba$,

dividiendo todo entre ba: $\frac{bx}{ab}+\frac{ay}{ba}=\frac{ba}{ba}$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

que es la ecuación *simétrica* de la recta.

A la distancia a se le conoce como *abscisa al origen* y como ya se explicó a la distancia b se le denomina *ordenada al origen.*



Ejemplos.
Encontrar la ecuación de la recta si cruza a los ejes coordenados en los siguientes puntos:

1) $P_1(5,0)$ y $P_2(0,7)$
Solución.
$a=5,\, b=7$, por tanto: $\frac{x}{5}+\frac{y}{7}=1$
multiplicando por 35: $7x+5y=35 \quad \Rightarrow \quad 7x+5y-35=0$

2) $P_1(0,-4)$ y $P_2(9,0)$
Solución.
$a=9,\, b=-4$, por tanto: $\frac{x}{9}+\frac{y}{-4}=1$
multiplicando por 36 : $4x-9y=36 \quad \Rightarrow \quad 4x-9y-36=0$

3) $P_1\left(\frac{7}{3},0\right)$ y $P_2\left(0,-\frac{8}{5}\right)$
Solución.
$a=\frac{7}{3},\, b=-\frac{8}{5}$, por tanto: $\frac{x}{\frac{7}{3}}+\frac{y}{-\frac{8}{5}}=1$
que equivale a: $\frac{3x}{7}+\frac{5y}{-8}=1$
multiplicando por 56 :
$24x-35y=56 \quad \Rightarrow \quad 24x-35y-56=0$

GENERAL

Toda recta puede expresarse como una ecuación de primer grado en dos variables de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

que es la ecuación *general* de la recta.

Para conocer sus características se despeja y: $By = -Ax - C \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

ecuación que es de la forma $y = mx + b$, por lo tanto, si se compara se tiene que:

$$m = -\frac{A}{B} \qquad \text{y} \qquad b = -\frac{C}{B}$$

que son las expresiones que respectivamente determinan la pendiente y la ordenada al origen de la ecuación general de la recta.

Ejemplos.
Obtener la pendiente y la ordenada al origen de las siguientes rectas:

1) $6x - 3y + 24 = 0$

Solución.

$A = 6, \quad B = -3, \quad C = 24$

$m = -\frac{6}{-3} = 2$; $\qquad b = -\frac{24}{-3} = 8$

2) $-16x - 10y - 35 = 0$

Solución.

$A = -16, \quad B = -10, \quad C = -35$

$m = -\frac{-16}{-10} = -1.6$; $\qquad b = -\frac{-35}{-10} = -3.5$

GRAFICACIÓN DE RECTAS

Una recta puede graficarse teniendo como referencia al eje y en su ordenada al origen, y sobre ese punto se debe inclinar su pendiente considerando que $m = \frac{y}{x}$ e interpretándolo de la siguiente forma:

- Si la pendiente es positiva, se deben recorrer x unidades a la derecha y y unidades hacia arriba. En el caso de obtenerse un número natural, se recorre una unidad a la derecha y y unidades para arriba.
- Si la pendiente es negativa, se deben recorrer x unidades a la izquierda y y unidades hacia arriba. En el caso de obtenerse un número entero, se recorre una unidad a la izquierda y y unidades para arriba.
- Si la pendiente es cero, se trata de una recta paralela o coincidente al eje x
- Si la pendiente es infinita, se trata de una recta paralela o coincidente al eje y.

Ejemplos.
Trazar las gráficas de las siguientes rectas:

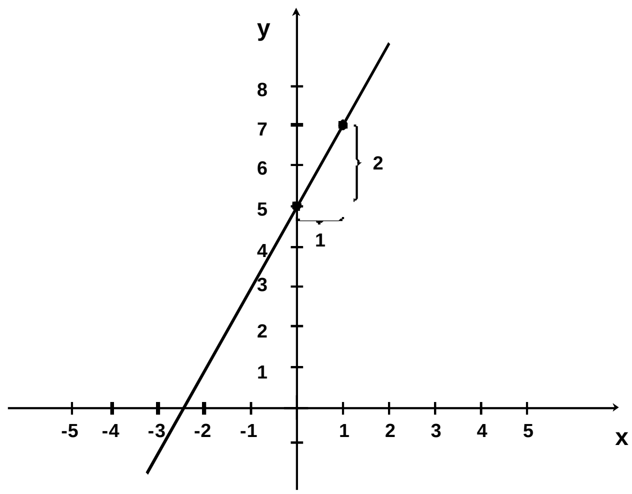
1) $6x - 3y + 15 = 0$

Solución.

$A = 6, \quad B = -3, \quad C = 15$

$m = -\frac{6}{-3} = 2$; $\qquad b = -\frac{15}{-3} = 5$

Como la pendiente es positiva, a partir de la ordenada $b = 5$ se recorre una unidad para la derecha y dos unidades para arriba.



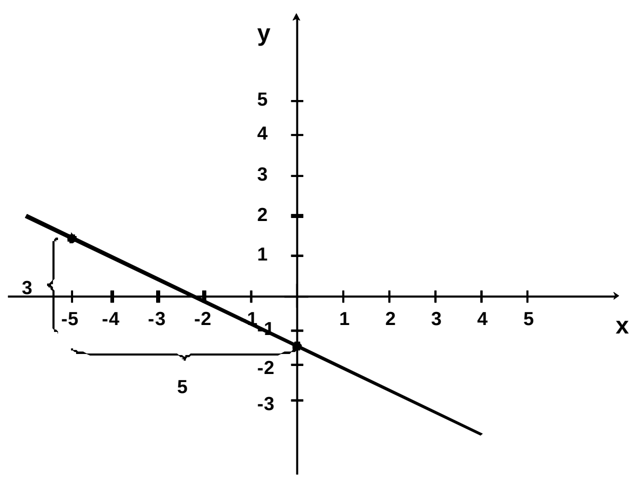
2) $3x + 5y + 7 = 0$

Solución.

$A = 3, \quad B = 5, \quad C = 7$

$m = -\frac{3}{5}$; $\qquad b = -\frac{7}{5}$

Como la pendiente es negativa, a partir de la ordenada $b = -\frac{7}{5}$, se recorren cinco unidades para la izquierda y tres unidades para arriba.



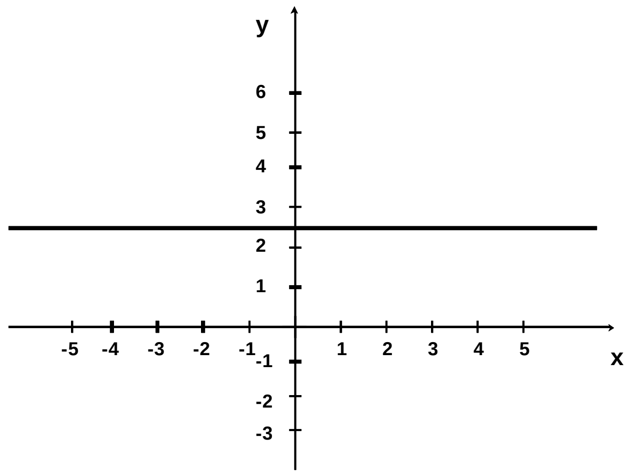
3) $6y - 15 = 0$

Solución.

$$A = 0, \quad B = 6, \quad C = -15$$

$$m = -\frac{0}{6} = 0 \;; \qquad b = -\frac{-15}{6} = \frac{5}{2}$$

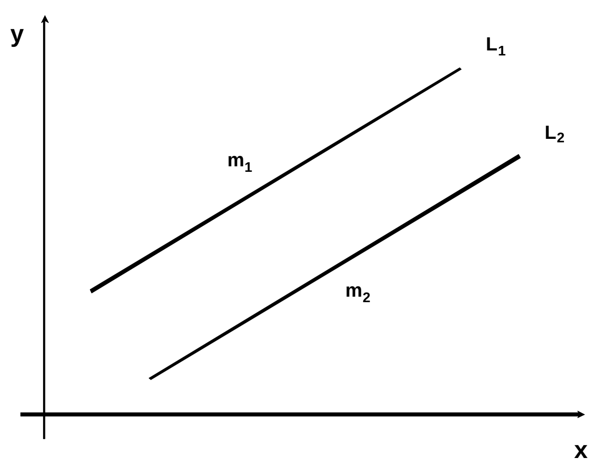
Como la pendiente es cero, a partir de la ordenada $b = \frac{5}{2}$ se traza una línea horizontal.



RELACIONES ENTRE RECTAS

PARALELISMO

Dos rectas L_1 y L_2 son paralelas si sus pendientes son iguales. Es decir si cumplen que: $m_1 = m_2$. Además, dos rectas L_1 y L_2 son coincidentes (es decir se sobreponen) cuando aparte de tener la misma pendiente, pasan por un mismo punto.



Ejemplos.

1) ¿Serán paralelas las rectas $L_1:\ 4x-6y-10=0$ y $L_2:\ -2x-3y+13=0$?
Solución.

Para L1: $m_1=-\frac{A_1}{B_1}=-\frac{4}{-6}=\frac{2}{3}$

Para L2: $m_2=-\frac{A_1}{B_1}=-\frac{(-2)}{-3}=-\frac{2}{3}$

como $m_1 \neq m_2$, las rectas no son paralelas.

2) ¿Serán paralelas las rectas $L_1:\ 8x-16y-20=0$ y $L_2:\ 4x-8y-10=0$?
Solución.

Para L1: $m_1=-\frac{A_1}{B_1}=-\frac{8}{-16}=\frac{1}{2}$

Para L2: $m_2=-\frac{A_1}{B_1}=-\frac{4}{-8}=\frac{1}{2}$

como $m_1=m_2$, las rectas si son paralelas.

Ahora: Para L1: $b_1=-\frac{C_1}{B_1}=-\frac{-20}{-16}=-\frac{5}{4}$

Para L2: $b_2=-\frac{C_1}{B_1}=-\frac{-10}{-8}=-\frac{5}{4}$

como $b_1=b_2$, las rectas además son coincidentes.

Nótese que si alguna de las ecuaciones se puede expresar como un producto de un número por la otra entonces las rectas son coincidentes. En este ejemplo si la recta L_2 se multiplica por dos se obtiene L_1.

3) Obtener la ecuación de la recta que pase por el punto $P(-4,6)$ y que sea paralela a la recta $16x-3y+18=0$
Solución.

Al ser paralelas $m_1=m_2$, entonces: $m_1=-\frac{A_1}{B_1}=-\frac{16}{-3}=\frac{16}{3}=m_2$

aplicando la ecuación punto pendiente de la recta:

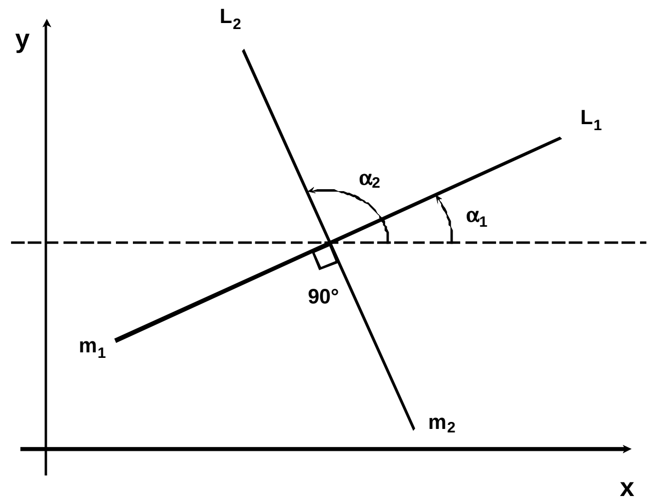
$$y-6=\frac{16}{3}(x+4) \quad \Rightarrow \quad 3(y-6)=16(x+4) \quad \Rightarrow \quad 3y-18=16x+64$$

$$\Rightarrow \quad 0=16x+64-3y+18 \quad \Rightarrow \quad 16x-3y+82=0$$

PERPENDICULARIDAD

Dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares (u ortogonales) si forman un ángulo de 90 grados entre sí.

Sea la siguiente figura:



como las rectas son perpendiculares: $\alpha_2 = \alpha_1 + 90°$

tomando la tangente de los ángulos en ambos miembros: $m_2 = \tan\alpha_2 = \tan(\alpha_1 + 90°) = -\cot\alpha_1$

pero como la tangente y la cotangente son funciones recíprocas se tiene: $-\cot\alpha_1 = -\dfrac{1}{\tan\alpha_1} = -\dfrac{1}{m_1}$

Por lo tanto, la condición de perpendicularidad entre dos rectas L_1 y L_2 se cumple siempre que el producto de sus pendientes sea -1:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Ejemplos.

1) ¿Serán perpendiculares las rectas $L_1:\ 3x - 6y - 11 = 0$ y $L_2:\ 10x + 5y - 18 = 0$?
Solución.

Para L_1: $m_1 = -\dfrac{A_1}{B_1} = -\dfrac{3}{-6} = \dfrac{1}{2}$

Para L_2: $m_2 = -\dfrac{A_2}{B_2} = -\dfrac{10}{5} = -2$

como $m_1 \cdot m_2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)(-2) = -1$, las rectas si son perpendiculares.

2) ¿Serán perpendiculares las rectas $L_1:\ 12x + 18y - 13 = 0$ y $L_2:\ y = -\dfrac{3}{2}x - 15$?

Solución.

Para L_1: $m_1 = -\dfrac{A_1}{B_1} = -\dfrac{12}{18} = -\dfrac{2}{3}$

Para L_2: $m_2 = -\dfrac{3}{2}$

como $m_1 \cdot m_2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = 1 \neq -1$, las rectas no son perpendiculares.

3) Obtener la ecuación de la recta que sea perpendicular a la recta $11x + 4y + 15 = 0$ y que pase por el punto $P(3,-12)$.

Solución.

$m_1 = -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{11}{4}$, pero por ser perpendiculares:

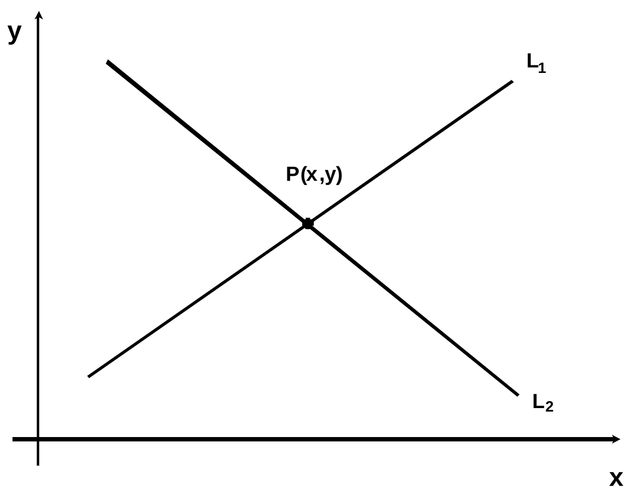
$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad m_2 = -\frac{1}{m_1} = \frac{-1}{-\frac{11}{4}} = \frac{4}{11}$, aplicando la ecuación punto-pendiente de la recta:

$$y - (-12) = \frac{4}{11}(x-3) \quad \Rightarrow \quad 11(y+12) = 4(x-3) \quad \Rightarrow \quad 11y + 132 = 4x - 12$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 4x - 12 - 11y - 132 \quad \Rightarrow \quad 4x - 11y - 144 = 0$$

PUNTO DE INTERSECCIÓN

El punto de intersección de dos rectas L_1 y L_2 viene dado por la solución del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de la forma: $\left.\begin{array}{l} L_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ L_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{array}\right\}$



en donde las rectas de la forma $Ax + By + C = 0$ deben transformarse a expresiones que cumplan con: $Ax + By = -C$. Esto es:

$$\left.\begin{array}{l} L_1: \quad A_1x + B_1y = -C_1 \\ L_2: \quad A_2x + B_2y = -C_2 \end{array}\right\}$$

Puede emplearse cualquiera de los métodos para resolver el sistema: igualación, suma o resta, sustitución o determinantes. Los ejemplos que a continuación se ilustran utilizan el método de resolución por determinantes.

Si la solución no existe, geométricamente se interpreta como que son rectas paralelas.

Ejemplos.
Determinar el punto de intersección de los siguientes pares de rectas:

1) $10x+8y-44=0$ y $6x+2y-18=0$
Solución.

El sistema por resolver se convierte en: $\left.\begin{aligned} L_1: &\ 10x+8y=44 \\ L_2: &\ 6x+2y=18 \end{aligned}\right\}$, aplicando el método de determinantes se tiene:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}44 & 8\\ 18 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}10 & 8\\ 6 & 2\end{vmatrix}}=\frac{88-144}{20-48}=\frac{-56}{-28}=2\ ; \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}10 & 44\\ 6 & 18\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}10 & 8\\ 6 & 2\end{vmatrix}}=\frac{180-264}{20-48}=\frac{-84}{-28}=3$$

$\therefore$ el punto solución es $P(2,3)$

comprobación: $\left.\begin{aligned} L_1: &\ 10(2)+8(3)=20+24=44 \\ L_2: &\ 6(2)+2(3)=12+6=18 \end{aligned}\right\}$

2) $4x-10y+52=0$ y $10x-4y-80=0$
Solución.

El sistema por resolver se convierte en: $\left.\begin{aligned} L_1: &\ 4x-10y=-52 \\ L_2: &\ 10x-4y=80 \end{aligned}\right\}$, aplicando el método de determinantes se tiene:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-52 & -10\\ 80 & -4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & -10\\ 10 & -4\end{vmatrix}}=\frac{208+800}{-16+100}=\frac{1008}{84}=12\ ; \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}4 & -52\\ 10 & 80\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & -10\\ 10 & -4\end{vmatrix}}=\frac{320+520}{-16+100}=\frac{840}{84}=10$$

$\therefore$ el punto solución es $P(12,10)$

comprobación: $\left.\begin{aligned} L_1: &\ 4(12)-10(10)=48-100=-52 \\ L_2: &\ 10(12)-4(10)=120-40=80 \end{aligned}\right\}$

3) $14x+6y-1=0$ y $7x+3y+4=0$
Solución.

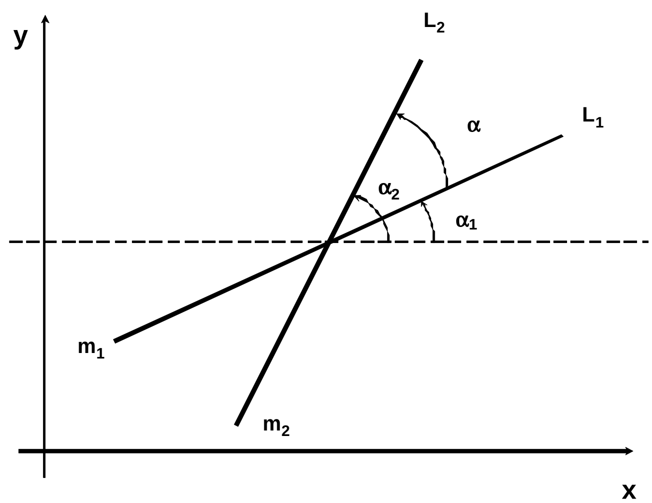
El sistema por resolver se convierte en: $\left.\begin{array}{l} L_1: \ 14x+6y=1 \\ L_2: \ 7x+3y=-4 \end{array}\right\}$, aplicando el método de determinantes se tiene:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 6\\ -4 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}14 & 6\\ 7 & 3\end{vmatrix}}=\frac{3+24}{42-42}\ ; \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}14 & 1\\ 7 & -4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}14 & 6\\ 7 & 3\end{vmatrix}}=\frac{-56-7}{42-42}$$

como el denominador de ambos cocientes es cero, el punto solución no existe. Esto implica que son rectas paralelas.

ÁNGULO DE INTERSECCIÓN

Sean dos rectas L_1 y L_2 con sus respectivas pendientes m_1 y m_2:



Se aprecia que: $\alpha=\alpha_2-\alpha_1$

La tangente del ángulo de intersección α es: $\tan\alpha=\tan(\alpha_2-\alpha_1)$

aplicando la identidad trigonométrica vista en el capítulo II: $\tan\alpha=\dfrac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_1\cdot\tan\alpha_2}$

y como $m_1=\tan\alpha_1$ y $m_2=\tan\alpha_2$, se tiene que: $\tan\alpha=\dfrac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}$

Por lo tanto, el ángulo de intersección de dos rectas L_1 y L_2 medido en sentido contrario de las manecillas del reloj desde L_1 hasta L_2 está dado por la expresión:

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}$$

Ejemplos.
Determinar el ángulo de intersección de los siguientes pares de rectas:

1) $L_1:\ 5x+9y-11=0$ y $L_2:\ 4x-2y-6=0$
Solución.

Para L_1: $m_1=-\frac{A_1}{B_1}=-\frac{5}{9}$

Para L_2: $m_2=-\frac{A_2}{B_2}=-\frac{4}{-2}=2$

sustituyendo se tiene:

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{2-\left(\frac{-5}{9}\right)}{1+(2)\left(-\frac{5}{9}\right)}=\tan^{-1}\frac{\frac{23}{9}}{-\frac{1}{9}}=\tan^{-1}(-23)\approx-87.51°$$

2) $L_1:\ 3x-4y-11=0$ y $L_2:\ 7x+5y-96=0$
Solución.

Para L_1: $m_1=-\frac{A_1}{B_1}=-\frac{3}{-4}=\frac{3}{4}$

Para L_2: $m_2=-\frac{A_2}{B_2}=-\frac{7}{5}$

sustituyendo se tiene:

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{-\frac{7}{5}-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}\left(-\frac{7}{5}\right)}=\tan^{-1}\frac{\frac{-28-15}{20}}{-\frac{1}{20}}=\tan^{-1}(43)\approx 88.66°$$

3) $L_1:\ 2x+3y-61=0$ y $L_2:\ -4x+13y-17=0$
Solución.

Para L_1: $m_1=-\frac{A_1}{B_1}=-\frac{2}{3}$

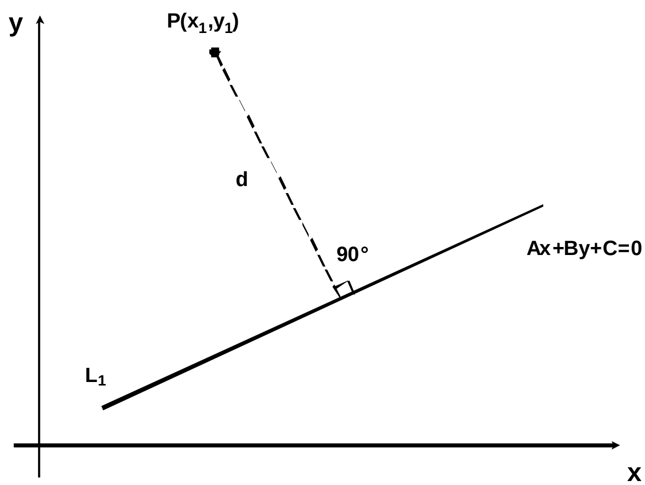
Para L_2: $m_2=-\frac{A_2}{B_2}=-\frac{-4}{13}=\frac{4}{13}$

sustituyendo se tiene:

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{\frac{4}{13}-\left(-\frac{2}{3}\right)}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{13}\right)}=\tan^{-1}\frac{\frac{12+26}{39}}{\frac{31}{39}}=\tan^{-1}\left(\frac{38}{31}\right)\approx 50.79°$$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Para encontrar la distancia de un punto a una recta, primero se encuentra el punto de intersección de la recta con su perpendicular y después se aplica la distancia entre dos puntos:



Sea una recta L_1 de la forma $Ax+By+C=0$.

Dado que su pendiente es $-\frac{A}{B}$, la pendiente de una recta perpendicular es $\frac{B}{A}$.

La ecuación de la recta perpendicular que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ es:

$$y-y_1=\frac{B}{A}(x-x_1)$$

desarrollando:

$$A(y-y_1)=B(x-x_1) \quad \Rightarrow \quad Ay-Ay_1=Bx-Bx_1 \quad \Rightarrow \quad Bx-Ay+Ay_1-Bx_1=0$$

Para encontrar el punto de intersección $Q(\bar{x},\bar{y})$ se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ll} L_1: & Ax+By+C_1=0 \\ L_2: & Bx-Ay+Ay_1-Bx_1=0 \end{array}\right\}$$

Multiplicando la primera ecuación por A, la segunda ecuación por B, y sumando:

$$\bar{x}=\frac{B^2x_1-ABy_1-AC}{A^2+B^2}$$

Multiplicando la primera ecuación por B, la segunda ecuación por A, y restando:

$$\bar{y}=\frac{-ABx_1-A^2y_1-BC}{A^2+B^2}$$

la distancia que separa a los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(\bar{x},\bar{y})$ es:

$$d^2=\left(x_1-\frac{B^2x_1-ABy_1-AC}{A^2+B^2}\right)^2+\left(y_1-\frac{-ABx_1+A^2y_1-BC}{A^2+B^2}\right)^2$$

encontrando un denominador común y simplificando se obtiene:

$$d^2=\frac{A^2(Ax_1+By_1+C)^2}{\left(A^2+B^2\right)^2}+\frac{B^2(Ax_1+By_1+C)^2}{\left(A^2+B^2\right)^2}$$

factorizando $\frac{(Ax_1+By_1+C)^2}{(A^2+B^2)^2}$ y simplificando se llega a:

$$d^2=\frac{(Ax_1+By_1+C)^2}{A^2+B^2}$$

extrayendo la raíz cuadrada, se obtiene que la mínima distancia que separa a la recta $Ax+By+C=0$ del punto $P(x_1,y_1)$ es:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

En el caso en que se quiera encontrar la distancia entre dos rectas paralelas, basta con determinar un punto de una de las rectas y aplicar la expresión anterior.

Ejemplos.
Obtener la distancia que separa a la recta del punto en los siguientes casos:

1) $5x+7y-13=0$, $P_1(3,-4)$
Solución.
$$d=\frac{|5(3)+7(-4)+(-13)|}{\sqrt{5^2+7^2}}=\frac{|15-28-13|}{\sqrt{25+49}}=\frac{|-26|}{\sqrt{74}}=\frac{26}{\sqrt{74}}\,u.$$

2) $-8x+6y+4=0$, $P_1(5,6)$
Solución.
$$d=\frac{|(-8)(5)+6(6)+4|}{\sqrt{(-8)^2+(6)^2}}=\frac{|-40+36+4|}{\sqrt{81+36}}=\frac{|0|}{\sqrt{117}}=\frac{0}{\sqrt{117}}=0\,u.$$
este resultado implica que el punto pertenece a la recta.

Ejemplo.
Obtener la distancia entre las rectas paralelas: $L_1:\ x-2y+15=0$ y $L_2:\ 4x-8y+24=0$
Solución.
Primero se comprueba que las rectas sean paralelas:

Para L_1: $m_1=-\frac{A_1}{B_1}=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$.

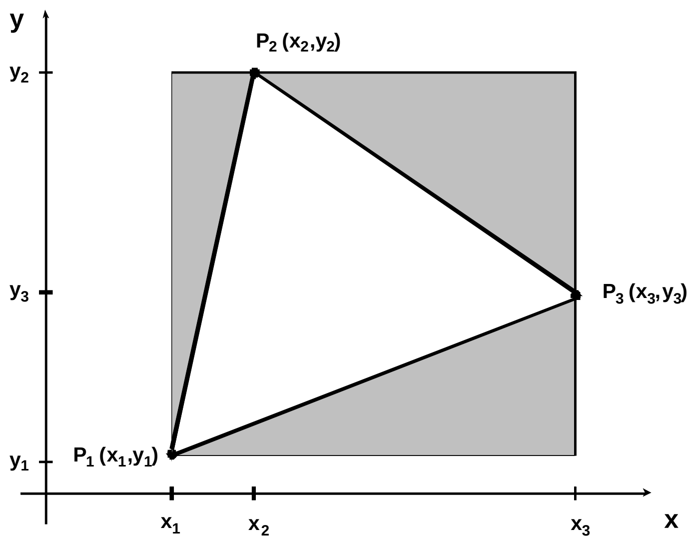
Para L_2: $m_2=-\frac{A_1}{B_1}=-\frac{4}{-8}=\frac{1}{2}$

como $m_1=m_2$, las rectas si son paralelas. Ahora, se determina un punto cualquiera de la recta L_2: Si $x=0 \ \Rightarrow\ 4(0)-8y+24=0 \ \Rightarrow\ y=\frac{-24}{-8}=3$, por lo que el punto es $P_1(0,3)$ y la distancia a L_1 es:

$$d=\frac{|1(0)+(-2)(3)+15|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|-6+15|}{\sqrt{1+4}}=\frac{9}{\sqrt{5}}\,u.$$

ÁREA DE UN TRIÁNGULO

Dados tres puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ no colineales en el plano, se genera un triángulo cuyos lados se forman al unir cada punto con los otros dos:



En la figura, el área del triángulo viene dada por el área del rectángulo menos el área de los tres triángulos sombreados, esto es:

$$Área = (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{2} - \frac{(x_3 - x_1)(y_3 - y_1)}{2} - \frac{(x_3 - x_2)(y_2 - y_3)}{2}$$

$$= (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - \frac{x_2y_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + x_1y_1}{2} - \frac{x_3y_3 - x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_1}{2} - \frac{x_3y_2 - x_3y_3 - x_2y_2 + x_2y_3}{2}$$

$$= (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) + \frac{1}{2}(-x_2y_2 + x_2y_1 + x_1y_2 - x_1y_1 - x_3y_3 + x_3y_1 + x_1y_3 - x_1y_1 - x_3y_2 + x_3y_3 + x_2y_2 - x_2y_3)$$

$$= x_3y_2 - x_3y_1 - x_1y_2 + x_1y_1 + \frac{1}{2}(x_2y_1 + x_1y_2 - 2x_1y_1 + x_3y_1 + x_1y_3 - x_3y_2 - x_2y_3)$$

$$= \frac{1}{2}(x_2y_1 - x_1y_2 - x_3y_1 + x_1y_3 + x_3y_2 - x_2y_3)$$

factorizando y_2 y x_2:

$$Área = \frac{1}{2}(x_3 - x_1)y_2 + (y_1 - y_3)x_2 + x_1y_3 - x_3y_1$$

cómo el área no puede ser negativa, entonces:

$$Área = \frac{1}{2}\left|(x_1 - x_3)y_2 + (y_3 - y_1)x_2 + x_3y_1 - x_1y_3\right|$$

Por otra parte, si se calcula el determinante dispuesto como: $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ se obtiene:

$$=\frac{1}{2}\left(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2-x_2y_1-x_1y_3\right)=\frac{1}{2}\left|\left(x_1-x_3\right)y_2+\left(y_3-y_1\right)x_2+x_3y_1-x_1y_3\right|$$

obteniendo el mismo resultado, por lo tanto, el área de un triángulo también puede calcularse por:

$$Área=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Ejemplos.
Mediante los dos métodos, obtener el área del triángulo generado al unir los puntos siguientes:

1) $P_1(2,4)$, $P_2(-5,-1)$ y $P_3(-3,6)$
Solución.

$$Área=\frac{1}{2}\left|\left(2-(-3)\right)(-1)+(6-4)(-5)+(-3)(4)-(2)(6)\right|=\frac{1}{2}\left|(5)(-1)+2(-5)-12-12\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|-5-10-12-12\right|=\frac{1}{2}\left|-39\right|=\frac{39}{2}u^2$$

comprobación:

$$Área=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -5 & -1 & 1 \\ -3 & 6 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left|-2-30-12-3+20-12\right|=\frac{1}{2}\left|-39\right|=\frac{39}{2}u^2$$

2) $P_1(-8,1)$, $P_2(7,-5)$ y $P_3(10,-4)$
Solución.

$$Área=\frac{1}{2}\left|(-8-10)(-5)+(-4-1)(7)+10(1)-(-8)(-4)\right|=\frac{1}{2}\left|(-18)(-5)+(-5)(7)+10-32\right|$$

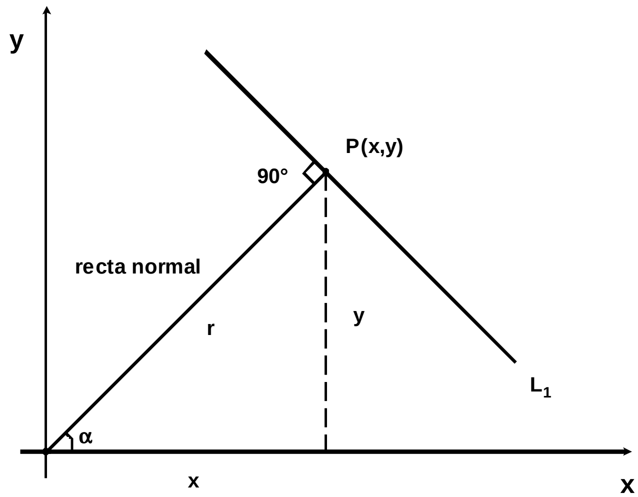
$$=\frac{1}{2}\left|90-35+10-32\right|=\frac{1}{2}\left|33\right|=\frac{33}{2}u^2$$

comprobación:

$$Área=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -8 & 1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 10 & -4 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left|40-28+10+50-7-32\right|=\frac{1}{2}\left|33\right|=\frac{33}{2}u^2$$

ECUACIÓN NORMAL DE LA RECTA

Sean una recta L_1 en el plano, un punto $P(x,y)$ que le pertenece y otra recta perpendicular a L_1 que pase por el origen, llamada *recta normal*:



De la figura se deduce que: $\cos\alpha=\frac{x}{r} \Rightarrow x=r\cdot\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha=\frac{y}{r} \Rightarrow y=r\cdot\operatorname{sen}\alpha$

Por lo que las coordenadas del punto $P(x,y)$ son $P(r\cdot\cos\alpha, r\cdot\operatorname{sen}\alpha)$.

También, de la gráfica se puede advertir que la pendiente de la recta normal es: $m_2=\tan\alpha$, pero por condición de perpendicularidad: $m_1=-\frac{1}{m_2}=-\frac{1}{\tan\alpha}=-\cot\alpha=-\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$.

Aplicando la fórmula punto pendiente se tiene:

$y-r\cdot\operatorname{sen}\alpha=-\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}(x-r\cdot\cos\alpha) \Rightarrow y\cdot\operatorname{sen}\alpha-r\cdot\operatorname{sen}^2\alpha=-x\cdot\cos\alpha+r\cdot\cos^2\alpha$

$\Rightarrow x\cdot\cos\alpha+y\cdot\operatorname{sen}\alpha-r\cdot\operatorname{sen}^2\alpha-r\cdot\cos^2\alpha=0$, factorizando $-r$:

$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\operatorname{sen}\alpha-r(\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)=0$, pero se sabe que $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$:

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\operatorname{sen}\alpha-r=0$$

que es la ecuación *normal* de la recta.

Comparando la ecuación normal con la ecuación general de la recta se tiene que:

$A\cdot k=\cos\alpha,\quad B\cdot k=\operatorname{sen}\alpha,\quad C\cdot k=r$, donde k es una constante de proporcionalidad.

Elevando al cuadrado las primeras dos igualdades y sumándolas:

$\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha=1=k^2A^2+k^2B^2$, despejando la constante se obtiene:

$k=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Por lo tanto: $\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\operatorname{sen}\alpha=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ y $r=-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Ejemplos.

1) Determinar la ecuación de la recta normal cuya distancia al origen es $r=4$ y que tiene un ángulo de inclinación de la normal de $30°$.

Solución.
Sustituyendo en la fórmula se tiene: $x\cdot\cos 30° + y\cdot\operatorname{sen} 30° - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0.866x + 0.5y - 4 = 0$

2) Transformar la ecuación general de la recta $12x + 5y - 26 = 0$ a su forma normal.
Solución.
Aplicando en las fórmulas correspondientes se tiene:

$$\cos\alpha = \frac{12}{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{12}{\sqrt{144+25}} = \frac{12}{\sqrt{169}} = \frac{12}{13}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{5}{\sqrt{144+25}} = \frac{5}{\sqrt{169}} = \frac{5}{13}$$

$$r = -\frac{26}{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{26}{\sqrt{144+25}} = \frac{26}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} = 2,$$ por lo tanto: $\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 2 = 0$.

3) Obtener la distancia que separa a la recta $-4x + 3y - 35 = 0$ del origen sobre la recta normal.
Solución.
La distancia está dada por el término independiente de la forma normal de la recta:

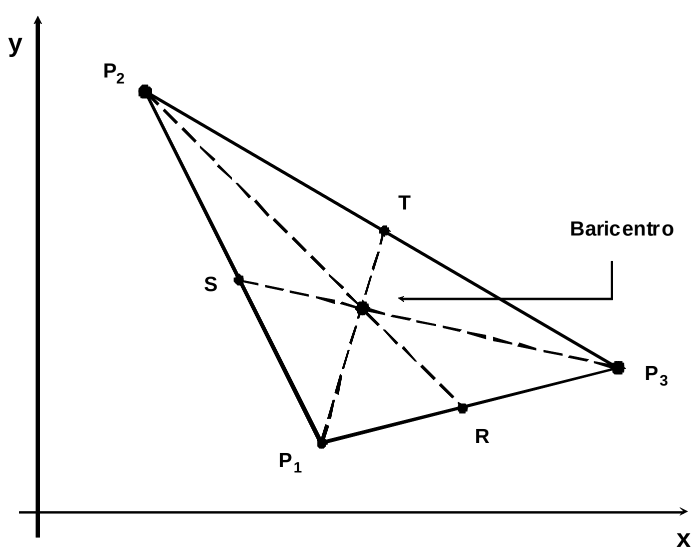
$$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = -\frac{-35}{5} = 7\,u.$$

RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

MEDIANAS DE UN TRIÁNGULO. BARICENTRO

La mediana de un triángulo es un segmento de recta que une cada vértice con el punto medio del lado opuesto. Para obtener las medianas de un triángulo, se consideran cada uno de los tres vértices con respecto al punto medio del segmento opuesto. Posteriormente se encuentran los ecuaciones de las rectas de cada una de las medianas aplicando la forma de la recta punto–pendiente y finalmente se determina el punto de intersección, llamado *baricentro*, resolviendo el sistema formado por dos de las tres ecuaciones encontradas.

El baricentro, que es el centro de gravedad del triángulo, es decir el punto del que se pude tensar y en que queda suspendido horizontalmente.



Ejemplo.

Obtener el baricentro del triángulo formado por los vértices: $P_1(3,4)$, $P_2(-5,-2)$ y $P_3(3,6)$

Solución.

De acuerdo con la nomenclatura de la figura:

Para el lado $\overline{P_1P_2}$ su punto medio es: $S\left(\frac{3+(-5)}{2},\frac{4+(-2)}{2}\right) \Rightarrow S(-1,1)$

Para el lado $\overline{P_1P_3}$ su punto medio es: $R\left(\frac{3+3}{2},\frac{4+6}{2}\right) \Rightarrow R(3,5)$

Para el lado $\overline{P_2P_3}$ su punto medio es: $T\left(\frac{-5+3}{2},\frac{-2+6}{2}\right) \Rightarrow T(-1,2)$

Ahora se encuentran las pendientes de las medianas:

Para el segmento $\overline{P_1T}$ se tiene $m_1=\frac{2-4}{-1-3}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$

Para el segmento $\overline{P_2R}$ se tiene $m_2=\frac{5-(-2)}{3-(-5)}=\frac{7}{8}$

Para el segmento $\overline{P_3S}$ se tiene $m_3=\frac{1-6}{-1-3}=\frac{-5}{-4}=\frac{5}{4}$

La ecuación de la mediana $\overline{P_1T}$ es: $y-4=\frac{1}{2}(x-3) \Rightarrow 2(y-4)=x-3$

$\Rightarrow 2y-8=x-3 \Rightarrow x-2y+5=0$

La ecuación de la mediana $\overline{P_2R}$ es: $y-(-2)=\frac{7}{8}(x-(-5)) \Rightarrow 8(y+2)=7(x+5)$

$\Rightarrow 8y+16=7x+35 \Rightarrow 7x-8y+19=0$

La ecuación de la mediana $\overline{P_3S}$ es: $y-6=\frac{5}{4}(x-3) \Rightarrow 4(y-6)=5(x-3)$

$\Rightarrow 4y-24=5x-15 \Rightarrow 5x-4y+9=0$

Usando las primeras dos de las tres ecuaciones anteriores, el sistema por resolver se convierte en:

$\left.\begin{array}{l} L_1: \ x-2y=-5 \\ L_2: \ 7x-8y=-19 \end{array}\right\}$, aplicando el método de determinantes se tiene:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-5 & -2\\ -19 & -8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 7 & -8\end{vmatrix}}=\frac{40-38}{-8+14}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\,; \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -5\\ 7 & -19\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 7 & -8\end{vmatrix}}=\frac{-19+35}{-8+14}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$$

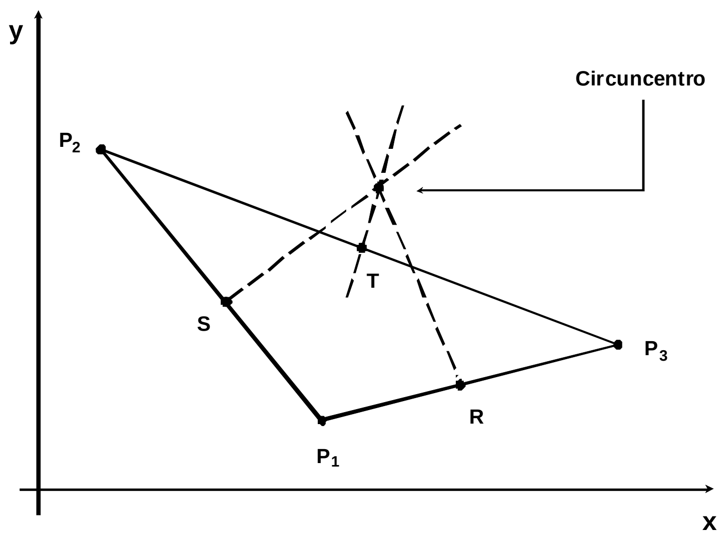
Comprobando en la tercera ecuación se tiene: $5\left(\frac{1}{3}\right)-4\left(\frac{8}{3}\right)+9=\frac{5}{3}-\frac{32}{3}+9=\frac{5-32+27}{3}=0$

$\therefore$ el baricentro se ubica en $\left(\frac{1}{3},\frac{8}{3}\right)$.

MEDIATRICES DE UN TRIÁNGULO. CIRCUNCENTRO

Las mediatrices de un triángulo son las rectas perpendiculares a los puntos medios de cada lado. Para obtener las mediatrices de un triángulo, se consideran cada uno de los puntos medios de los segmentos. Se calculan las pendientes de cada uno de los lados. Después se determinan las ecuaciones de las rectas perpendiculares aplicando la forma de la recta punto–pendiente y finalmente se encuentra el punto de intersección, llamado circuncentro, resolviendo el sistema formado por dos de las tres ecuaciones encontradas.

El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita, que es la que pasa por los tres vértices del triángulo.



Ejemplo.

Obtener el circuncentro del triángulo formado por los vértices: $P_1(-6,8)$, $P_2(0,-10)$ y $P_3(2,4)$

Solución.

De acuerdo con la nomenclatura de la figura:

Para el lado $\overline{P_1P_2}$, su punto medio es: $S\left(\frac{-6+0}{2},\frac{8+(-10)}{2}\right) \Rightarrow S(-3,-1)$

Para el lado $\overline{P_1P_3}$, su punto medio es: $R\left(\frac{-6+2}{2},\frac{8+4}{2}\right) \Rightarrow R(-2,6)$

Para el lado $\overline{P_2P_3}$, su punto medio es: $T\left(\frac{0+2}{2},\frac{-10+4}{2}\right) \Rightarrow T(1,-3)$

Ahora se encuentran las pendientes de cada uno de los lados del triángulo, sus perpendiculares (las que tienen un *) que corresponden a las mediatrices:

Para el segmento $\overline{P_1P_2}$ se tiene: $m_1=\frac{-10-8}{0-(-6)}=\frac{-18}{6}=-3 \Rightarrow m_1^*=-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3}$

Para el segmento $\overline{P_1P_3}$ se tiene: $m_2=\frac{4-8}{2-(-6)}=\frac{-4}{8}=\frac{-1}{2} \Rightarrow m_2^*=-\frac{1}{\frac{-1}{2}}=2$

Para el segmento $\overline{P_2P_3}$ se tiene: $m_3=\frac{4-(-10)}{2-0}=\frac{14}{2}=7 \Rightarrow m_3^*=-\frac{1}{7}$

La ecuación de la recta que pasa por el punto S y es perpendicular a $\overline{P_1P_2}$ es:

$$y-(-1)=\frac{1}{3}(x-(-3)) \;\Rightarrow\; 3(y+1)=x+3 \;\Rightarrow\; 3y+3=x+3 \;\Rightarrow\; x-3y=0$$

La ecuación de la recta que pasa por el punto R y es perpendicular a $\overline{P_1P_3}$ es:

$$y-6=2(x-(-2)) \;\Rightarrow\; y-6=2(x+2) \;\Rightarrow\; y-6=2x+4 \;\Rightarrow\; 2x-y+10=0$$

La ecuación de la recta que pasa por el punto T y es perpendicular a $\overline{P_2P_3}$ es:

$$y-(-3)=-\frac{1}{7}(x-1) \;\Rightarrow\; 7(y+3)=-(x-1) \;\Rightarrow\; 7y+21=-x+1 \;\Rightarrow\; x+7y+20=0$$

Usando las primeras dos de las tres ecuaciones anteriores, el sistema por resolver se convierte en: $\left.\begin{array}{l} L_1: \quad x-3y=0 \\ L_2: \quad 2x-y=-10 \end{array}\right\}$, aplicando el método de determinantes se tiene:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -10 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{0-30}{-1+6}=\frac{-30}{5}=-6 \quad ; \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-10-0}{-1+6}=\frac{-10}{5}=-2$$

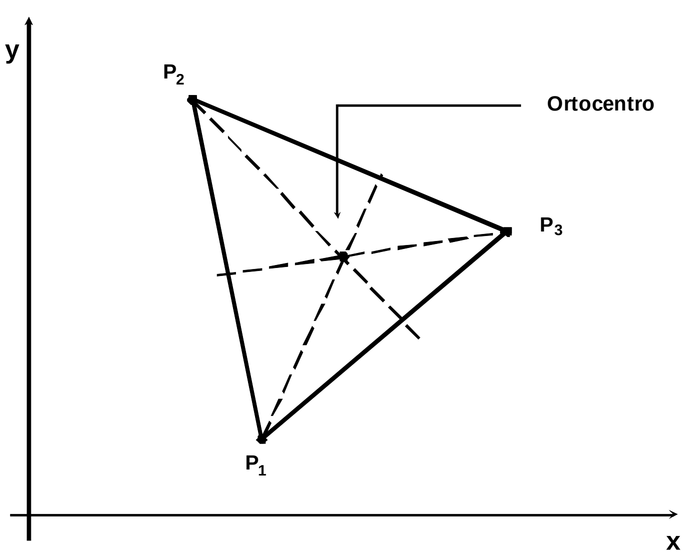
Comprobando en la tercera ecuación se tiene: $-6+7(-2)+20=-6-14+20=0$

$\therefore$ el circuncentro se ubica en $(-6,-2)$.

ALTURAS DE UN TRIÁNGULO. ORTOCENTRO

La altura de un triángulo es el segmento de recto perpendicular desde un vértice al lado opuesto. Para encontrar las alturas de un triángulo, se consideran cada una de las pendientes de los lados del triángulo. Posteriormente, utilizando el vértice opuesto y las pendientes obtenidas, se determinan las ecuaciones de las rectas perpendiculares aplicando la forma de la recta punto–pendiente. Finalmente se encuentra el punto de intersección, llamado *ortocentro*, resolviendo el sistema formado por dos de las tres ecuaciones encontradas.

Según el tipo de triángulo el ortocentro puede estar dentro, en un vértice o fuera del mismo.



Ejemplo.

Obtener el ortocentro del triángulo formado por los vértices: $P_1(-1,-5)$, $P_2(0,7)$ y $P_3(3,1)$

Solución.

De acuerdo con la nomenclatura de la figura, se encuentran las pendientes de los lados y sus perpendiculares (las que tienen *):

Para el segmento $\overline{P_1P_2}$ se tiene: $m_1=\frac{7-(-5)}{0-(-1)}=\frac{12}{1}=12 \;\Rightarrow\; m_1{*}=-\frac{1}{12}$

Para el segmento $\overline{P_1P_3}$ se tiene: $m_2=\frac{1-(-5)}{3-(-1)}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; m_2{*}=-\frac{1}{\frac{3}{2}}=-\frac{2}{3}$

Para el segmento $\overline{P_2P_3}$ se tiene: $m_3=\frac{1-7}{3-0}=\frac{-6}{3}=-2 \;\Rightarrow\; m_3{*}=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$

La ecuación de la altura que pasa por el punto P_3 y es perpendicular a $\overline{P_1P_2}$ es:

$$y-1=-\frac{1}{12}(x-3) \;\Rightarrow\; 12(y-1)=-(x-3) \;\Rightarrow\; 12y-12=-x+3 \;\Rightarrow\; x+12y-15=0$$

La ecuación de la altura que pasa por el punto P_2 y es perpendicular a $\overline{P_1P_3}$ es:

$$y-7=-\frac{2}{3}(x-0) \;\Rightarrow\; 3(y-7)=-2x \;\Rightarrow\; 3y-21=-2x \;\Rightarrow\; 2x+3y-21=0$$

La ecuación de la altura que pasa por el punto P_1 y es perpendicular a $\overline{P_2P_3}$ es:

$$y-(-5)=\frac{1}{2}(x-(-1)) \;\Rightarrow\; 2(y+5)=x+1 \;\Rightarrow\; 2y+10=x+1 \;\Rightarrow\; x-2y-9=0$$

Usando las primeras dos de las tres ecuaciones anteriores, el sistema por resolver se convierte en: $\left.\begin{aligned} L_1:&\quad x+12y=15 \\ L_2:&\quad 2x+3y=21 \end{aligned}\right\}$, aplicando el método de determinantes se tiene:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 15 & 12 \\ 21 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{45-252}{3-24}=\frac{-207}{-21}=\frac{69}{7}\;; \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 2 & 21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{21-30}{3-24}=\frac{-9}{-21}=\frac{3}{7}$$

Comprobando en la tercera ecuación se tiene: $\frac{69}{7}-2\left(\frac{3}{7}\right)-9=\frac{69-6-63}{7}=0$

$\therefore$ el ortocentro se ubica en $\left(\frac{69}{7},\frac{3}{7}\right)$.

APLICACIONES

En casi todas las ciencias exactas y en las sociales existen innumerables aplicaciones de las ecuaciones lineales y su representación gráfica.

En la vida cotidiana de forma recurrente también se aplica indirectamente la idea de recta.

Entre algunas de sus aplicaciones se pueden citar:

1. La medición de la temperatura en México y en Estados Unidos no es igual, sin embargo, se pueden obtener equivalencias ya que la relación entre grados Celsius $(°C)$ y Fahrenheit $(°F)$ es lineal. La fórmula que relaciona a ambas escalas es: $°F=\frac{9}{5}°C+32$, expresión de la forma, $y=mx+b$
2. En la construcción de caminos que comunican dos lugares, mientras las condiciones del terreno lo permitan, se trazan sobre líneas rectas.
3. En economía, algunas funciones de producción, tales como la oferta y la demanda se pueden modelar por rectas. Normalmente la oferta se representa como: $q=ap-b$, y la demanda es del tipo: $q=c-dp$, donde q es la cantidad de artículos fabricados, p , el precio y a,b,c,d son constantes. La intersección de ambas rectas determina el precio del producto.
4. En hidráulica, para describir la inclinación de los canales, normalmente no tienen pendientes mayores al 5% .
5. La depreciación de un producto con respecto al tiempo es lineal, es decir, a medida que pasa el tiempo, el artículo va perdiendo su valor hasta que se amortiza totalmente.
6. Un rayo láser se desplaza en forma de una recta.
7. De acuerdo con la mecánica newtoniana, todos los cuerpos caen en forma recta por efecto de la gravedad.
8. La gran mayoría de las columnas en construcciones utilizan el concepto de paralelismo.
9. En Arquitectura, una cantidad considerable de diseños están basados en rectas.
10. Las canchas de muchos deportes, tales como básquetbol, voleibol o tenis, están delimitadas por rectas.