5 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

ÍNDICE PARTICULAR

5

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

5.1 CONCEPTOS Y DEFINICIONES

Todos los triángulos constan de seis elementos primarios que son tres ángulos y tres lados. Resolver un triángulo significa encontrar algunos o todos los elementos del triángulo a partir de tres de ellos conocidos, siempre y cuando esos tres no sean los tres ángulos. Esto significa que los tres elementos conocidos pueden ser

- los tres lados,
- dos lados y un ángulo,
- un lado y dos ángulos.

Las definiciones de las funciones trigonométricas tienen su origen en triángulos rectángulos, tal y como se manejó en el párrafo 1.2 de la página 3, o en el 1.3.2 de la página 11, esto es que el *seno* es el cateto opuesto entre la hipotenusa, el *coseno* es el cateto adyacente entre la hipotenusa, la *tangente* es el cateto opuesto entre el cateto adyacente, etc. Podría decirse que inicialmente con ellas se podían resolver solamente triángulos rectángulos. Sin embargo, no solamente los triángulos rectángulos pueden resolverse con dichas funciones, aunque su origen esté allí, sino también los que no son rectángulos.

Existen dos leyes muy importantes de la trigonometría con las cuales puede resolverse todo tipo de triángulos. Son *la ley de los senos* y *la ley de los cosenos.*

5.2 LEY DE LOS SENOS

La ley de los senos es aplicable a cualquier triángulo si dentro de los tres elementos conocidos se tiene "el par" un lado y su ángulo opuesto conocidos, pudiendo ser el tercer elemento conocido otro lado o bien otro ángulo.

La utilización de la ley de los senos, por ser más simple y menos laboriosa, se prefiere sobre la ley de los cosenos. Con ella se puede calcular algún lado o algún ángulo desconocido.

La ley de los senos dice que:

En todo triángulo se cumple que

Un lado cualquiera entre el seno de su ángulo opuesto es igual a otro lado cualquiera entre el seno de su ángulo opuesto.

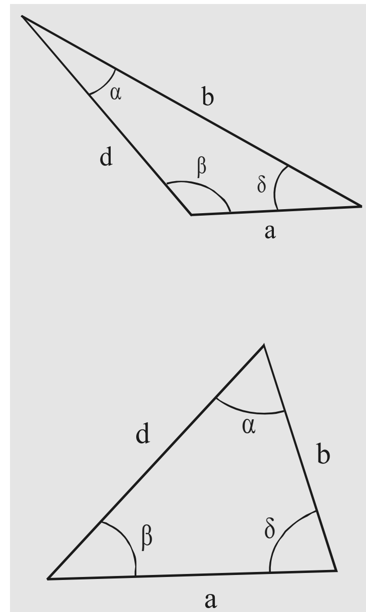

figura 32

Respecto de la figura 32, en cualquiera de los dos triángulos, conforme a la ley anterior, se cumple que

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{d}{sen\,\delta}$$

Al aplicar esta ley solamente se toma un signo igual y la fracción que se escribe en el lado izquierdo debe ser la del lado conocido entre el seno de su ángulo opuesto conocido, que en los ejemplos siguientes se les llamará "par conocido", y en el lado derecho del signo igual debe ponerse la fracción que incluya al tercer elemento conocido, es decir, al lado o ángulo restante conocido.

Ejemplo 1: Resolver el triángulo de la figura 33.

solución: El par conocido *lado-ángulo opuesto*, es el lado que mide 29 y su ángulo opuesto de 21 grados. Con ellos se formará fracción del lado izquierdo del signo igual. El tercer elemento conocido es el lado que mide 36, de manera que la fracción del lado derecho del signo igual se construirá con ese lado y su ángulo opuesto.

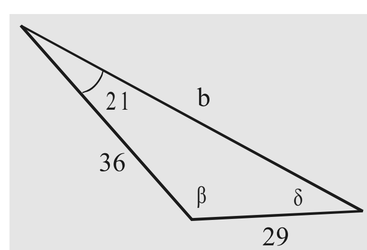

figura 33

$$\frac{29}{sen\,21} = \frac{36}{sen\,\delta}$$

Para despejar $sen\,\delta$, deben quitarse primero los dos denominadores, lo cual se logra multiplicando toda la igualdad simultáneamente por

$sen\ 21$ y por $sen\ \delta$, conforme a la ley de las igualdades o ley uniforme que dice que *"lo que se haga de un lado debe hacerse del otro lado para que la igualdad se conserve"*. Recordar que es falso que "pasan" al otro lado a multiplicar:

$$\left(\cancel{sen\ 21}\right)\left(sen\ \delta\right)\left[\frac{29}{\cancel{sen\ 21}}\right] = \left(sen\ 21\right)\left(\cancel{sen\ \delta}\right)\left[\frac{36}{\cancel{sen\ \delta}}\right]$$

$$29\ sen\ \delta = 36\ sen\ 21$$

dividiendo todo entre 29 para despejar $sen\,\delta$ y recordando que es falso que "pasa" al otro lado a dividir.

$$\frac{\cancel{29}\ sen\ \delta}{\cancel{29}} = \frac{36\ sen\ 21}{29}$$

realizando las operaciones indicadas en el lado derecho y despejando δ :

$$sen\,\delta = 0.444870557$$

$$\delta = arc\ sen\ 0.444870557$$

$$\boxed{\delta = 26.415}$$

En este momento se llevan conocidos dos ángulos, de manera que el tercero se obtiene por simple diferencia a 180, ya que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es 180. Así que

$$\beta = 180 - 21 - 26.415$$

$$\boxed{\beta = 132.584}$$

Finalmente, para calcular el tercer lado simplemente se vuelve a aplicar la ley de los senos, aprovechando que en este momento ya se conoce el ángulo β:

$$\frac{29}{sen\ 21} = \frac{b}{sen\ 132.584}$$

Para despejar el lado b , deben multiplicarse ambos lados de la igualdad por el denominador $sen\ 132.585$ para eliminarlo. Recordar que es falso que "pasa" al otro lado a multiplicar:

$$\left(sen\,132.584\right)\left[\frac{29}{sen\,21}\right]=\cancel{\left(sen\,132.584\right)}\left[\frac{b}{\cancel{sen\,132.584}}\right]$$

$$\frac{29\,sen\,132.584}{sen\,21}=b$$

que debe escribirse invertido de la siguiente forma:

$$b=\frac{29\,sen\,132.584}{sen\,21}$$

ya que se lee de izquierda a derecha y lo que debe leerse primero es la cosa o el objeto del que se desea saber algo, en este caso *b*. El alumno debe tomar como una regla práctica que siempre que se despeje cualquier cosa, lo despejado debe escribirse del lado izquierdo del signo igual, por la razón previamente citada.

Haciendo las operaciones indicadas se llega a que

$$\boxed{b=59.581}$$

Ejemplo 2: Resolver el triángulo de la figura 34.

solución: El par conocido *lado-ángulo opuesto*, es el lado que mide 51 y su ángulo opuesto es el de 68 grados. Con ellos se formará la fracción del lado izquierdo del signo igual. El tercer elemento conocido es el ángulo que mide 79, de manera que la fracción del lado derecho del signo igual se construirá con ese ángulo y su lado opuesto.

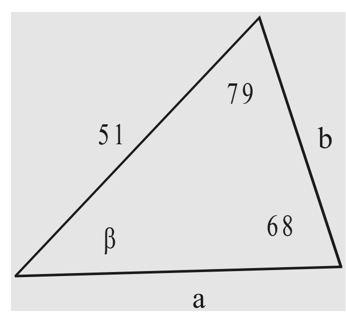

figura 34

$$\frac{51}{sen\,68}=\frac{a}{sen\,79}$$

Para despejar el lado a, deben multiplicarse ambos lados de la igualdad por $sen\,79$ para eliminar su denominador. Recordar que es falso que "pasa" al otro lado a multiplicar:

$$\left(sen\,79\right)\left[\frac{51}{sen\,68}\right]=\cancel{\left(sen\,79\right)}\left[\frac{a}{\cancel{sen\,79}}\right]$$

$$\frac{51\,sen\,79}{sen\,68} = a$$

que debe escribirse invertido de la siguiente forma:

$$a = \frac{51\,sen\,79}{sen\,68}$$

ya que se lee de izquierda a derecha y lo que debe leerse primero es lo que interesa definir, es decir, lo que interesa saber qué es, es a.

Haciendo las operaciones indicadas se llega a que

$$\boxed{a = 53.9946}$$

El ángulo β puede obtenerse fácilmente por simple diferencia a 180, ya que la suma de los tres ángulos interiores de cualquier triángulo suman 180 grados y de ellos ya se conocen dos. Entonces

$$\beta = 180 - (79 + 68)$$

$$\boxed{\beta = 33}$$

Finalmente, para calcular el tercer lado simplemente se vuelve a aplicar la ley de los senos, aprovechando que en este momento ya se conocen los tres ángulos y dos lados. Se recomienda utilizar el "par conocido" *lado-ángulo opuesto* original, de ser posible, para lograr mayor exactitud en los cálculo o evitar arrastrar posibles errores de cálculos anteriores.

$$\frac{51}{sen\,68} = \frac{b}{sen\,33}$$

Para despejar el lado b, deben multiplicarse ambos lados de la igualdad por el denominador $sen\,33$ para eliminarlo. Recordar que es falso que "pasa" al otro lado a multiplicar:

$$(sen\,33)\left[\frac{51}{sen\,68}\right] = \cancel{(sen\,33)}\left[\frac{b}{\cancel{sen\,33}}\right]$$

$$\frac{51\,sen\,33}{sen\,68} = b$$

que debe escribirse invertido de la siguiente forma:

$$b = \frac{51\, sen\, 33}{sen\, 68}$$

ya que se lee de izquierda a derecha y lo que debe leerse primero es la cosa o el objeto del que se desea saber algo, en este caso *b*.

Haciendo las operaciones indicadas se llega a que

$$\boxed{b = 29.958}$$

5.3 LEY DE LOS COSENOS

La ley de los cosenos es aplicable a cualquier triángulo si dentro de los tres elementos conocidos no se tiene "el par conocido" *un lado y su ángulo opuesto*, lo que significa que los tres elementos conocidos son dos lados y el ángulo que forman, o bien los tres lados. Si se tuvieran un lado y sus dos ángulos adyacentes conocidos, es más fácil calcular el tercer ángulo por diferencia a 180 y luego aplicar la ley de los senos, pues en ese momento ya se tendrían un lado y su ángulo opuesto conocidos.

La ley de los cosenos por ser más laboriosa, se utiliza solamente cuando la ley de los senos no se puede emplear por no tener "el par conocido" *lado-ángulo opuesto*.

La ley de los cosenos dice que:

En todo triángulo se cumple que

Un lado cualquiera al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos dos lados por el coseno del ángulo que forman.

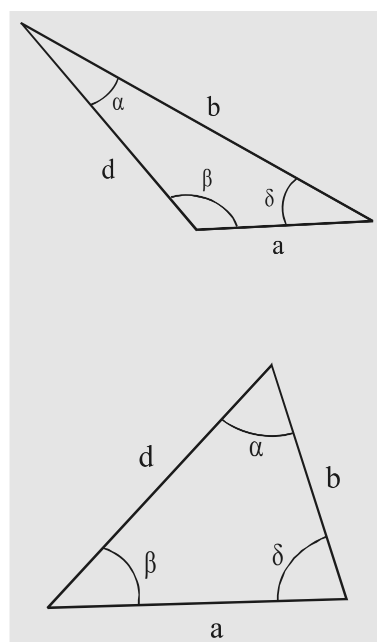

figura 35

Respecto de la figura 35, en cualquiera de los 2 triángulos, conforme a la ley anterior, se cumplen las tres siguientes igualdades:

$$a^2 = b^2 + d^2 - 2bd\, cos\, \alpha$$

$$b^2 = a^2 + d^2 - 2ad\, cos\, \beta$$

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\, cos\, \delta$$

Ejemplo 3: Resolver el triángulo de la figura 36.

solución: Como no se tiene ningún par *lado-ángulo opuesto conocidos*, ya que al lado conocido que mide 36 se le opone el ángulo desconocido β ; al lado conocido que mide 29 se le opone el ángulo desconocido a ; y al ángulo conocido que mide 103 grados se le opone el lado desconocido d , entonces no se puede utilizar la ley de los senos y por descalificación se emplea la ley de los cosenos.

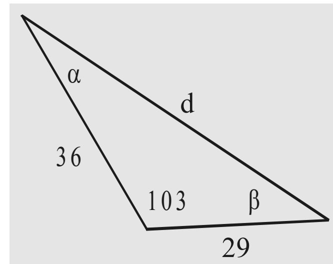

figura 36

De manera que utilizando la tercera igualdad

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \delta$$

sustituyendo valores se obtiene que

$$d^2 = 36^2 + 29^2 - 2(36)(29)\ cos\ 103$$

$$d^2 = 1296 + 841 - 2088\ cos\ 103$$

$$d^2 = 1296 + 841 - 2088\ (- 0.224951054)$$

$$d^2 = 1296 + 841 + 469.6978008$$

$$d^2 = 2606.697801$$

$$d = \sqrt{2606.697801}$$

$$\boxed{d = 51.05583}$$

En este momento ya se tiene el par *lado-ángulo opuesto conocidos*, que son el lado recién obtenido d = 51.05583 y su ángulo opuesto que vale 103 grados, de manera que ya se puede emplear la ley de los senos:

$$\frac{51.05583}{sen\,103} = \frac{29}{sen\,\alpha}$$

Para despejar $sen\ \alpha$, deben quitarse primero los dos denominadores, lo cual se consigue multiplicando toda la igualdad (recordar la ley de las igualdades) por ambos denominadores. Recordar que es falso que "pasan" al otro lado a multiplicar. Haciéndolo en forma simultánea resulta:

$$\left(\cancel{sen\,103}\right)\left(sen\,\alpha\right)\left[\frac{51.05583}{\cancel{sen\,103}}\right] = \left(sen\,103\right)\left(\cancel{sen\,\alpha}\right)\left[\frac{29}{\cancel{sen\,\alpha}}\right]$$

$$51.05583\ sen\ \alpha = 29\ sen\ 103$$

dividiendo todo entre 51.05583 para despejar sen α y recordando que es falso que "pasa" al otro lado a dividir:

$$\frac{\cancel{51.05583}\ sen\ \alpha}{\cancel{51.05583}} = \frac{29\ sen\ 103}{51.05583}$$

realizando las operaciones indicadas en el lado derecho y despejando α :

$$sen\ \alpha = 0.553447703$$

$$\alpha = arc\ sen\ 0.553447703$$

$$\boxed{\alpha = 33.6038}$$

En este momento se llevan conocidos dos ángulos, de manera que el tercero se obtiene por simple diferencia a 180, ya que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es 180. Así que

$$\beta = 180 - 103 - 33.6038$$

$$\boxed{\beta = 43.3962}$$

Ejemplo 4: Resolver el triángulo de la figura 37.

solución: Como no se tiene ningún par lado-ángulo opuesto conocidos, ya que al lado conocido que mide 50 se le opone el ángulo desconocido β ; al lado conocido que mide 39 se le opone el ángulo desconocido α y al ángulo conocido que mide 79 grados se le opone el lado desconocido d , entonces no se puede utilizar la ley de los senos y por descalificación se emplea la ley de los cosenos.

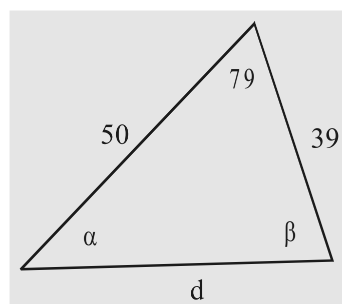

figura 37

De manera que utilizando la tercera igualdad

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \delta$$

sustituyendo valores se obtiene que

$$d^2 = 50^2 + 39^2 - 2(50)(39)\ cos\ 79$$

$$d^2 = 2500 + 1521 - 3900\ cos\ 79$$

$$d^2 = 2500 + 1521 - 3900\ (0.190808995)$$

$$d^2 = 2500 + 1521 - 744.1550805$$

$$d^2 = 3276.84492$$

$$d = \sqrt{3276.84492}$$

$$\boxed{d = 57.24373}$$

En este momento ya se tiene el par *lado-ángulo opuesto conocidos*, que son el lado recién obtenido $d = 57.24373$ y su ángulo opuesto que vale 79 grados, de manera que ya se puede emplear la ley de los senos:

$$\frac{57.24373}{sen\ 79} = \frac{39}{sen\ \alpha}$$

Para despejar $sen\ \alpha$, deben quitarse primero los dos denominadores, lo cual se consigue multiplicando toda la igualdad (recordar la ley de las igualdades) por ambos denominadores. Recordar que es falso que "pasan" al otro lado a multiplicar. Haciéndolo en forma simultánea resulta:

$$\left(\cancel{sen\ 79}\right)\left(sen\ \alpha\right)\left[\frac{57.24373}{\cancel{sen\ 79}}\right] = \left(sen\ 79\right)\left(\cancel{sen\ \alpha}\right)\left[\frac{39}{\cancel{sen\ \alpha}}\right]$$

$$57.24373\ sen\ \alpha = 39\ sen\ 79$$

dividiendo todo entre 57.24373 para despejar $sen\ \alpha$ y recordando que es falso que "pasa" al otro lado a dividir.

$$\frac{\cancel{57.24373}\ sen\ \alpha}{\cancel{57.24373}} = \frac{39\ sen\ 79}{57.24373}$$

realizando las operaciones indicadas en el lado derecho y despejando α :

$$sen\ \alpha = 0.668779972$$

$$\alpha = arc\ sen\ 0.668779972$$

$$\boxed{\alpha = 41.9729}$$

En este momento se llevan conocidos dos ángulos, de manera que el tercero se obtiene por simple diferencia a 180, ya que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es 180. Así que

$$\beta = 180 - 79 - 41.9729$$

$$\boxed{\beta = 59.027}$$

Ejemplo 5: Resolver el triángulo de la figura 38.

Este ejemplo tiene por objetivo mostrar un error muy frecuente que se comete en la resolución de triángulos y que aparentemente está bien resuelto.

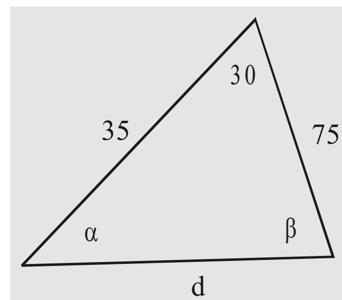

figura 38

El meollo del asunto es que, cuando no se tiene experiencia, no debe calcularse el ángulo mayor por la ley de los senos, sino por diferencia a 180 una vez obtenidos los otros dos ángulos, en virtud de lo siguiente:

1) En todo triángulo hay por lo menos dos ángulos agudos; el otro puede ser también agudo, o bien recto o de más de 90 grados. En otras palabras, el ángulo mayor de un triángulo puede o no ser de más de 90 grados. Cuando mucho hay un ángulo de más de 90 grados.

2) En todo triángulo, al lado mayor se le opone el ángulo mayor y al lado menor se le opone el ángulo menor. Por lo tanto, al lado intermedio se le opone el ángulo intermedio.

3) Como el *arco seno* positivo tiene soluciones en el primero y en el segundo cuadrante, es decir, una solución es de menos de 90 grados y la otra entre 90 y 180 grados, al emplear la ley de los senos para calcular el ángulo mayor, al momento de sacar *arco seno*, éste puede ser un valor del primero o del segundo cuadrante.

Solución: Como no se tiene ningún par *lado-ángulo opuesto conocidos,* ya que al lado conocido que mide 35 se le opone el ángulo desconocido β; al lado conocido que mide 75 se le opone el ángulo desconocido α y al ángulo conocido que mide 30 grados se le opone el lado desconocido d, entonces no se puede utilizar la ley de los senos y por descalificación se emplea la ley de los cosenos.

De manera que utilizando la tercera igualdad

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \delta$$

sustituyendo valores se obtiene que

$$d^2 = 35^2 + 75^2 - 2(35)(75)\ \cos 30$$

$$d^2 = 1225 + 5625 - 5250 \cos 30$$

$$d^2 = 1225 + 5625 - 5250\ (0.866025403)$$

$$d^2 = 1225 + 5625 - 4546.633366$$

$$d^2 = 2303.366634$$

$$d = \sqrt{2303.366634}$$

$$\boxed{d = 47.9934}$$

En este momento ya se tiene el par *lado-ángulo opuesto conocidos,* que son el lado recién obtenido $d = 47.9934$ y su ángulo opuesto que vale 30 grados, de manera que ya se puede emplear la ley de los senos. Sin embargo, para mostrar el error que se suele cometer si se calcula el ángulo mayor (el que se opone al lado mayor), con toda intención se va a calcular el ángulo α, de lo que se obtiene:

$$\frac{47.9934}{sen\ 30} = \frac{75}{sen\ \alpha}$$

Para despejar $sen\ \alpha$, deben quitarse primero los dos denominadores, lo cual se logra multiplicando toda la igualdad (tener en cuenta la ley de las igualdades) por ambos denominadores. Recordar que es falso que los denominadores "pasan" al otro lado multiplicando. Haciéndolo en forma simultánea resulta:

$$\left(\cancel{sen\ 30}\right)\left(sen\ \alpha\right)\left[\frac{47.9934}{\cancel{sen\ 30}}\right] = \left(sen\ 30\right)\left(\cancel{sen\ \alpha}\right)\left[\frac{75}{\cancel{sen\ \alpha}}\right]$$

$$47.9934\ sen\ \alpha = 75\ sen\ 30$$

Dividiendo todo entre 47.9934 para despejar $sen\ \alpha$ (recordar que es falso que "pasa" al otro lado a dividir)

$$\frac{47.9934\ sen\ \alpha}{47.9934} = \frac{75\ sen\ 30}{47.9934}$$

Realizando las operaciones indicadas en el lado derecho y despejando a :

$$sen\ \alpha = 0.78135$$

$$\alpha = arc\ sen\ 0.78135$$

$$\boxed{\alpha = 51.38}$$

Así que por diferencia a 180 grados,

$$\beta = 180 - (30 + 51.38)$$
$$\beta = 98.62$$

Aparentemente no ha habido ningún error en el procedimiento y la solución parecería ser la mostrada en la figura 39. Sin embargo puede verse que hay una incongruencia en los resultados: al lado mayor se le opone el ángulo intermedio; al lado menor se le opone el ángulo mayor y al lado intermedio se le opone el ángulo menor. Por lo tanto, hubo algo incorrecto.

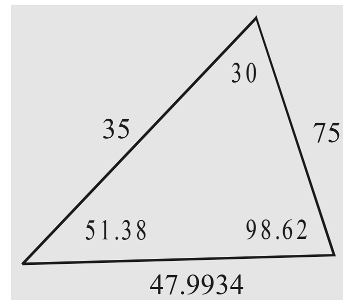

figura 39

Efectivamente, como se advirtió al principio de este ejemplo, no se debe calcular el ángulo mayor por medio de la ley de los senos cuando se tiene poca experiencia porque éste podría ser de más de 90 grados y la calculadora, al sacar el *arco seno* correspondiente únicamente proporciona el de menos de 90 grados. Y así sucedió en este ejemplo.

Si se observa, cuando se empleó la ley de los senos en la relación

$$\frac{47.9934}{sen\,30} = \frac{75}{sen\,\alpha}$$

se calculó el ángulo mayor (el ángulo α), lo cual se sabe porque se opone al lado mayor. Lo correcto, para evitar estos riesgos de equivocación, es calcular el otro ángulo desconocido que con toda certeza no es el mayor, o sea el ángulo β.

Haciéndolo entonces correctamente se obtiene:

$$\frac{47.9934}{sen\,30} = \frac{35}{sen\,\beta}$$

Para despejar $sen\,\beta$, deben quitarse primero los dos denominadores, siguiendo el procedimiento antes mostrado. Haciéndolo resulta:

$$\left(\cancel{sen\,30}\right)\left(sen\,\beta\right)\left[\frac{47.9934}{\cancel{sen\,30}}\right] = \left(sen\,30\right)\left(\cancel{sen\,\beta}\right)\left[\frac{35}{\cancel{sen\,\beta}}\right]$$

$$47.9934\,sen\,\beta = 35\,sen\,30$$

Dividiendo todo entre 47.9934 para despejar $sen\,\beta$, insistiendo en que es falso que “pase a dividir”:

$$\frac{\cancel{47.9934}\ sen\ \beta}{\cancel{47.9934}} = \frac{35\ sen\ 30}{47.9934}$$

$$sen\ \beta = 0.36463347$$
$$\beta = arc\ sen\ 0.36463347$$

$$\boxed{\beta = 21.385}$$

Así que por diferencia a 180 grados,

$$\alpha = 180 - (30 + 21.385)$$

$$\boxed{\alpha = 128.615}$$

La solución es la mostrada en la figura 40. Puede verse que hay congruencia en los resultados: al lado mayor se le opone el ángulo mayor; al lado menor se le opone el ángulo menor y al lado intermedio se le opone el ángulo intermedio.

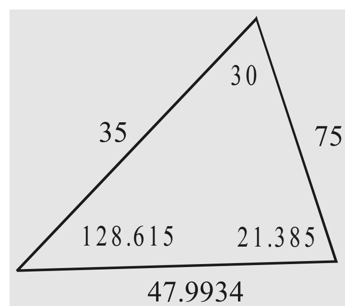

figura 40

Cuidado: Una cosa es que los resultados sean congruentes y otra cosa es que la figura esté bien hecha. La figura 40 está mal hecha en el sentido de que no guarda proporción con los valores. Por ejemplo, el ángulo mayor de 128.615 es un ángulo obtuso y sin embargo está dibujado como agudo. Pero el hecho de que la figura no esté proporcionada no altera los valores reales de los lados y de los ángulos. Allí hay un problema de dibujo, no de matemáticas. De hecho, la figura debería ser como lo muestra la figura 41.

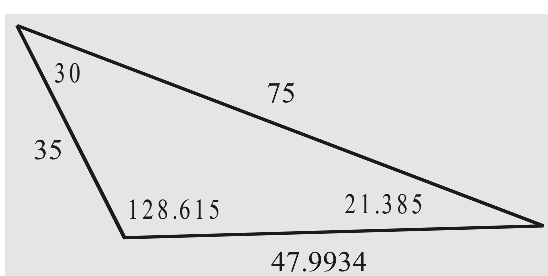

figura 41

Ejemplo 6: Calcular la distancia que hay en un cubo de 20 cm de lado, desde uno de sus vértices hasta el centro del cuadrado de la cara opuesta.

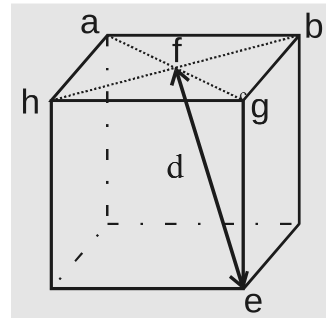

figura 42

Solución: Cuando se requiere resolver algún problema de un cuerpo geométrico en tres dimensiones, deben construirse triángulos, de preferencia rectángulos por ser más fáciles de resolver, por planos, de tal manera que la distancia d pedida pertenezca a un triángulo cuyos lados o ángulos se hayan podido obtener a través de otros triángulos.

En la figura 42, la distancia pedida d es la que va desde el vértice e hasta el punto central f de la cara opuesta. El alumno en este tipo de problemas debe activar a lo máximo posible su imaginación espacial, es decir, imaginarse los cuerpos en el espacio.

Obsérvese que dicha distancia d es la hipotenusa del triángulo rectángulo efg , del cual se sabe que el lado ge mide 20 cm. por ser una cara del cubo. El primer paso entonces es calcular cuánto mide la distancia fg que pertenece al triángulo mencionado efg . Para ello es necesario analizar el cuadrado abgh , que si en la figura 42 está en perspectiva, se puede dibujar en el plano de la hoja para verlo con más claridad, el cual se muestra en la figura 43.

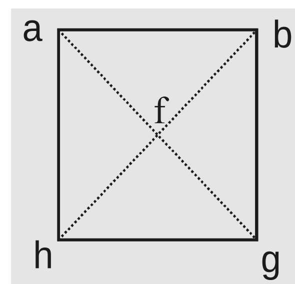

figura 43

La distancia fg puede obtenerse de dos formas: Una, considerando el triángulo rectángulo abg, del cual se conocen las medidas de sus dos catetos ab y bg que miden 20 cm. Por el teorema de Pitágoras se puede calcular la hipotenusa ag y la mitad es la distancia buscada fg . La otra forma es analizando el triángulo rectángulo bfg del que se sabe que sus ángulos miden 45 grados y la hipotenusa bg 20 cm. Con la función *seno* (o *coseno*) se obtiene el valor de fg .

Haciéndolo de la primera forma, a partir del triángulo rectángulo abg , por el teorema de Pitágoras se obtiene que

$$\mathsf{ag} = \sqrt{20^2 + 20^2}$$

$$\mathsf{ag} = \sqrt{800}$$

$$\mathsf{ag} = 28.2842 \text{ cm.}$$

Por lo tanto,

$$\mathsf{fg} = \frac{\mathsf{ag}}{2}$$

$$\mathsf{fg} = 14.1421 \text{ cm.}$$

Con estos datos se puede ya pasar al triángulo fge (ver figura 42), el cual está en perspectiva en dicha figura, pero dibujándolo en el plano del papel puede apreciarse como en la figura 44.

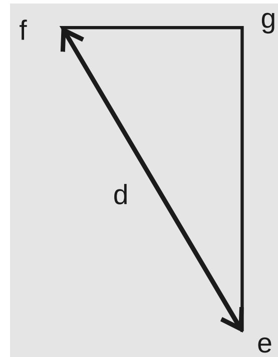

figura 44

Sabiendo que

fg = 14.1421 cm.
ge = 20 cm. (Es un lado del cubo)

Por el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$\text{fg} = \sqrt{20^2 + 14.1421^2}$$

$$\boxed{\text{fg} = 24.494\ cm}$$

Ejemplo 7: Se construye el pentágono regular de la figura 45, cuyos lados miden 60 cm. cada uno. Calcular la longitud de los lados del triángulo bde formado por dos diagonales y un lado del pentágono, así como los tres ángulos interiores de dicho triángulo.

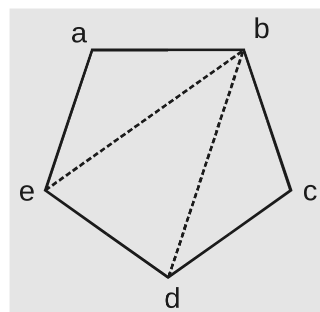

figura 45

Solución: Como la suma de los ángulos interiores del pentágono es p + q + r + s + t = 360 (figura 46) y todos son iguales, cualquiera de ellos, por ejemplo p, mide

$$\text{p} = \frac{360}{5} = 72$$

Por otra parte, en el triángulo abo , figura 46, la suma de los ángulos $\beta + \theta$ es la diferencia a 180 de q , o sea que

$$\beta + \theta = 180 - 72 = 108$$

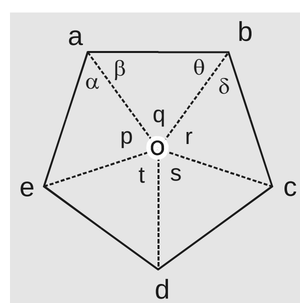

figura 46

y como $\beta = \theta$, entonces $\beta = 54$. Además, como todos los triángulos interiores del pentágono son iguales, entonces también $\alpha = \beta = 54$ y, por lo tanto, $\alpha + \beta = 108$, que corresponde al ángulo eab de la figura 45.

En la figura 45, el triángulo eab es isósceles, ya que los lados ea = ab por ser lados del polígono regular. Por lo tanto los ángulos aeb y abe son iguales y deben de medir 36 grados, como lo muestra la figura 47.

El ángulo aed = eab = 108, por lo tanto el ángulo bed debe medir 108 - 36 = 72.

El triángulo bed es isósceles, ya que be = bd por ser diagonales, por lo tanto el ángulo adb también debe medir 72 grados. Finalmente, por diferencia a 180 se obtiene que el ángulo ebd mide 36 grados (ver figura 47).

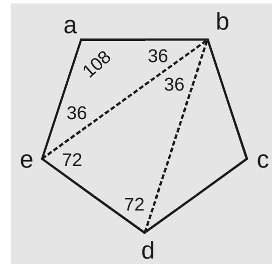

figura 47

De esta manera se tienen ya los tres ángulos interiores del triángulo ebd y además se sabe que el lado ed mide 60 cms. por ser un lado del polígono. Ver figura 48.

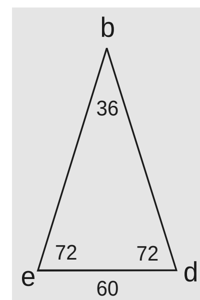

figura 48

De manera que por la ley de los senos:

$$\frac{60}{sen\ 36} = \frac{\text{eb}}{sen\ 72}$$

$$\text{eb} = \frac{60\ sen\ 72}{sen\ 36}$$

$$\boxed{\text{eb} = 97.082}$$

Y como eb = bd , el problema ha quedado resuelto.

EJERCICIO 21

Resolver los siguientes triángulos, respecto de la figura 49, si se tienen en cada caso los siguientes datos:

1) $a = 26$; $b = 35$; $\alpha = 42$
2) $a = 60$; $d = 49$; $\delta = 42$
3) $b = 46$; $d = 35$; $\beta = 122$
4) $a = 48$; $b = 49$; $\beta = 97$
5) $a = 20$; $d = 35$; $\beta = 152$
6) $b = 77$; $d = 41$; $\alpha = 30$
7) $b = 16$; $\alpha = 35$; $\beta = 107$
8) $a = 81$; $\delta = 40$; $\beta = 111$
9) $d = 22$; $\beta = 113$; $\delta = 27$
10) $a = 85$; $\delta = 39$; $\alpha = 18$
11) $a = 30$; $b = 40$; $d = 26$
12) $a = 100$; $b = 135$; $d = 90$
13) $a = 75$; $b = 122$; $d = 18$
14) $a = 63$; $b = 88$; $d = 7$

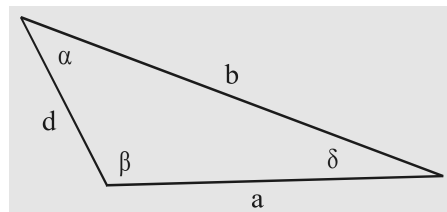

figura 49

Resolver los siguientes triángulos, respecto de la figura 50, si se tienen en cada caso los siguientes datos:

15) $a = 23$; $b = 21$; $\alpha = 62$
16) $a = 62$; $d = 48$; $\delta = 44$
17) $b = 49$; $d = 39$; $\beta = 72$
18) $a = 68$; $b = 49$; $\beta = 47$
19) $a = 27$; $d = 33$; $\beta = 52$
20) $b = 70$; $d = 54$; $\alpha = 45$
21) $b = 19$; $\alpha = 58$; $\beta = 37$
22) $a = 80$; $\delta = 46$; $\beta = 56$
23) $d = 25$; $\beta = 53$; $\delta = 70$
24) $a = 85$; $\delta = 39$; $\alpha = 80$
25) $a = 20$; $b = 17$; $d = 28$
26) $a = 224$; $b = 128$; $d = 183$
27) $a = 120$; $b = 100$; $d = 10$
28) $a = 150$; $b = 85$; $d = 300$

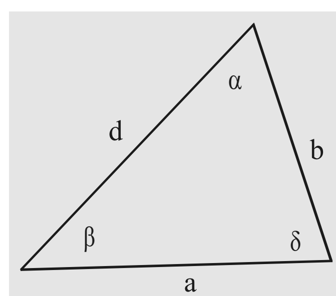

figura 50

29) Se construye el triángulo ***dcb*** mostrado en la figura 51. La recta ***bc*** es horizontal. Desde el vértice ***c*** se traza la vertical ***ac*** hasta intersecar con el lado ***db***. Calcular la longitud del segmento ***ac*** .

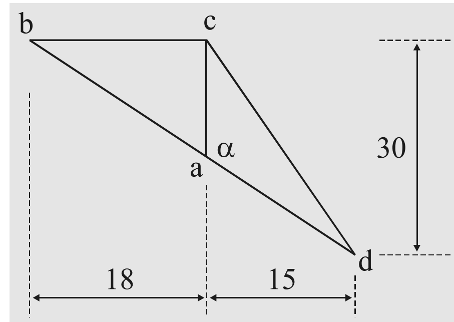

figura 51

30) En el problema anterior, respecto de la figura 51, calcular el valor del ángulo α .

31) Se construye el triángulo ***abc*** mostrado en la figura 52. El lado ***bc*** es horizontal. Se ubica el punto ***e*** a 8 unidades del vértice ***c*** y a 10 unidades del vértice ***b***. Desde ese punto ***e*** se traza una recta ***ed*** paralela al lado ***ac***. Calcular la longitud del segmento ***ed***.

Nota: Este problema se puede resolver fácilmente por medio de triángulos semejantes, pero se recomienda que no se resuelva así, sino por medio de la ley de los senos y/o de los cosenos por ser el tema en estudio.

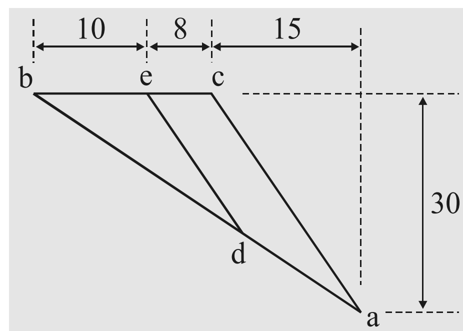

figura 52

32) En la armadura de la figura 53, el elemento ***bc*** está horizontal y los puntos ***a*** y ***d*** quedan también en el mismo plano horizontal. Calcular la longitud de la distancia horizontal ***d***. Cuidado: No está a la mitad.

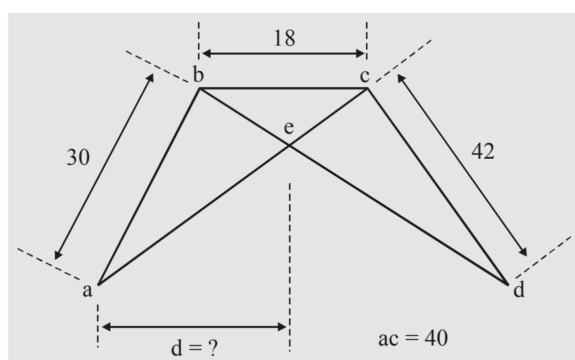

figura 53

33) En la figura 53, calcular la longitud de los segmentos ***be***, ***ed*** y ***ae***.

34) Calcular la altura h en una pirámide formada por triángulos equiláteros de 80 cm. de lado cada uno (figura 54).

35) Si la altura de la pirámide formada por triángulos equiláteros de la figura 54 mide 75 cm., ¿Cuánto miden sus lados?

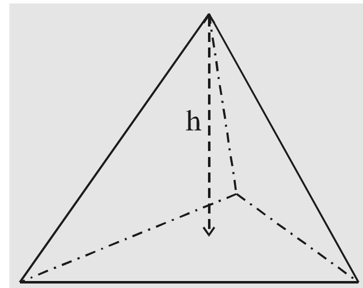

figura 54

36) Se construye un heptágono regular de 25 cm. de lado (ver figura 55). Calcular cuánto miden los ángulos interiores del triángulo abc, así como la longitud de sus lados ab y ac.

37) Si en el heptágono regular de la figura 55 el lado ab mide 20 cm., ¿Cuánto miden los lados del polígono?

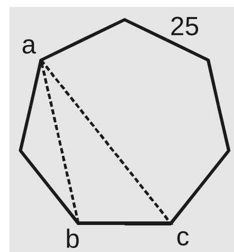

figura 55

38) Se construye una pirámide recta de base cuadrangular (ver figura 56), cuyos lados miden 50 cm. y la altura eg mide 70 cm. Calcular cuánto miden las aristas eb, ec, etc.

39) En el problema anterior, calcular el ángulo de inclinación θ de la cara triangular ebc respecto de la base cuadrada abcd.

40) En el problema de la figura 56, si las aristas eb, ec, etc. miden 90 cm y el ángulo θ formado por la base cuadrangular y una de las caras triangulares laterales mide 50 grados, calcular la altura eg de la pirámide.

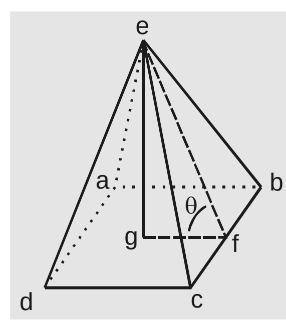

figura 56