Capítulo 2

PROBABILIDAD

La probabilidad y la estadística son, sin duda, las ramas de las Matemáticas que están en mayor auge en este siglo, y tienen una tremenda aplicabilidad en todos los aspectos y ciencias, especialmente en las Ciencias Sociales, puesto que aquellas variables que influyen en dichas ciencias, económicas, demográficas, suelen tener carácter aleatorio,es decir, no son deterministas, y se fundamentan en predicciones a partir de datos conocidos. Todo aquello que implique predicción nos lleva al terreno de la probabilidad.

2.1. Experimentos aleatorios

En todos los aspectos de la vida a veces nos encontramos con acontecimientos predeterminados, es decir, tales que podemos decir el resultado de dichos acontecimientos antes de que finalice o incluso de que comience. Tal es el caso de:

1. Tirar una piedra desde un edificio (sabemos que se caerá).
2. Calentar un cazo de agua (sabemos que la temperatura sube).
3. Golpear una pelota (sabemos que se va a mover, e incluso conociendo fuerzas que actúan etc, podemos conocer precisamente dónde caerá).

Tales acontecimientos o experimentos de los que podemos predecir el resultado antes de que se realicen se denominan experimentos deterministas.

Sin embargo, analicemos otro tipo de experimentos, mucho más interesantes desde el punto de vista matemático:

Imaginemos que lanzamos un dado al aire (normal, de 6 caras y no trucado). ¿Podemos predecir el resultado que vamos a obtener?. Evidentemente no. Este es un experimento que no es determinista. A este tipo de experimentos, en los cuales no se puede predecir el resultado antes de realizar el experimento se les denomina experimentos aleatorios.

Otros ejemplos de experimentos aleatorios pueden ser:

Tirar una moneda al aire y observar qué lado cae hacia arriba, rellenar una quiniela de fútbol, jugar una partida de póker y, en general, cualquier juego en el que intervenga el azar.

2.2. Definiciones básicas

La teoría de probabilidades se ocupa de asignar un cierto número a cada posible resultado que pueda ocurrir en un experimento aleatorio, con el fin de cuantificar dichos resultados y saber si un suceso es más probable que otro o relaciones parecidas. Con este fin, introduciremos algunas definiciones.

Si realizamos un experimento aleatorio, llamaremos *espacio muestral* del experimento al conjunto de todos los posibles resultados de dicho experimento.

Al espacio muestral lo representaremos por E (o bien por la letra griega omega Ω).

A cada elemento que forma parte del espacio muestral se le denomina *suceso elemental.*

Ejemplo:

1. ¿Cuál es el espacio muestral asociado al experimento de lanzar un dado normal al aire y observar la cara que queda hacia arriba?.

   Evidentemente, en este caso hay 6 posibles resultados (6 sucesos elementales) y el espacio muestral estará formado por: E={1,2,3,4,5,6}.

2. ¿Y en el caso del lanzamiento de una moneda?

   Entonces E={C,X}

Ejercicios:

1. Escribir el espacio muestral asociado al experimento de sacar una carta de entre las diez del palo de copas de una baraja española.

2. Escribir el espacio muestral asociado al experimento de lanzar dos dados de diferentes colores y observar la pareja de números que se obtiene.

3. Escribir el espacio muestral asociado al experimento de lanzar dos dados de diferentes colores y sumar los números que se obtienen.

Llamaremos *suceso aleatorio* a cualquier subconjunto del espacio muestral. El concepto de suceso es fundamental en probabilidad. Dicho de forma simple, un suceso de un experimento aleatorio es cualquier cosa que se nos ocurra afirmar sobre dicho experimento.

Así, si tiramos una moneda dos veces, serían sucesos todos los siguientes:

1. Sale al menos una cara.

2. Salen más caras que cruces.

3. La moneda cae de canto.

4. No sale ninguna cruz.

Llamaremos *suceso imposible* al que no tiene ningún elemento y lo representaremos por $\varnothing$.

Llamaremos *suceso seguro* al formado por todos los posibles resultados (es decir, al espacio muestral) .

Llamaremos *espacio de sucesos* y lo representaremos por S, al conjunto de todos los sucesos aleatorios.

Ejemplo:

1. En el caso del lanzamiento de la moneda en el que el espacio muestral era E={C,X} , analicemos quién es el espacio de sucesos:

   - Sucesos con 0 elementos: $\varnothing$

   - Sucesos con 1 elemento: {C},{X}

   - Sucesos con 2 elementos:{C,X}

   De modo que el espacio de sucesos es: S={$\varnothing$,{C},{X},{C,X}}.

2. En el caso del lanzamiento de dos monedas, si haces el diagrama de árbol obtienes el siguiente espacio muestral:

   $$E = \{(C, C), (C, X), (X, C), (X, X)\}$$

   El espacio de sucesos tiene ahora 16 elementos, que puedes intentar escribir, siguiendo el esquema anterior, desde los sucesos con 0 elementos hasta aquellos que tienen 4 elementos. Si describimos los sucesos que poníamos antes como ejemplos, obtenemos:

a) Sale al menos una cara={(C,C),(C,X),(X,C)}
b) Salen más caras que cruces={(C,C)}
c) La moneda cae de canto=∅
d) No sale ninguna cruz={(C,C)}

3. En el caso del lanzamiento del dado el espacio de sucesos es mucho más amplio (64 elementos. Sería interesante que intentases escribirlos todos o al menos te dieses cuenta de cómo son , aunque no los escribas todos)

   En este mismo ejemplo, se puede considerar el suceso A= "sacar un número par". ¿De qué sucesos elementales consta el suceso A?. Evidentemente, A={{2},{4},{6}}.

   Otros sucesos pueden ser: B = "Sacar un número mayor que 5-{{6}}.

   C = "Sacar un número par y menor que 5-{{2},{4}}.

Ejercicio: Una urna contiene dentro 4 bolas de las cuales 2 son blancas, 1 roja y otra azul. Se saca una bola de la urna.
a) Escribir el espacio muestral.
b) Escribir los sucesos "no sacar bola azul" y "sacar bola roja o blanca".
c) Escribir el espacio de sucesos.

Los sucesos admiten una representación gráfica que facilita su interpretación; del modo:

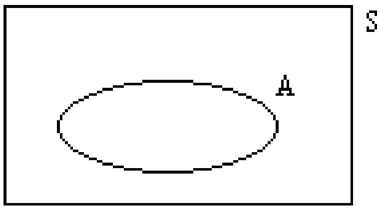

Figura 2.1: Representación en diagrama de Venn del suceso A

Por ejemplo, en el caso del dado:

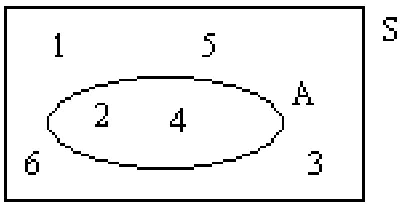

Figura 2.2: Representación en diagrama de Venn para un dado

A = "salir par y menor que 5". Estos diagramas se denominan diagramas de Venn.
Propiedad:
Si el espacio muestral tiene n elementos, el espacio de sucesos tiene 2^n elementos.

Ejemplo:
En el caso del dado, el espacio muestral tenía 6 elementos y el espacio de sucesos tiene $2^6 = 64$ elementos.
En el caso de la moneda, el espacio muestral tenía dos elementos y el espacio de sucesos tiene $2^2 = 4$ elementos.

2.3. Operaciones con sucesos

Si realizamos un experimento aleatorio y consideramos varios sucesos A, B, C, etc, asociados a dicho experimento, podemos realizar varias operaciones entre ellos. Los más importantes son:

1. Igualdad de sucesos: Dos sucesos A y B son iguales si están compuestos por los mismos elementos. Lo expresaremos por A = B.

2. Intersección de sucesos: Llamaremos *suceso intersección* de los sucesos A y B, y lo representaremos por $A \cap B$, al suceso "ocurren A y B a la vez".

   Ejemplo: Si tiramos un dado, ya sabemos que el espacio muestral asociado es E={1,2,3,4,5,6}.

   Sean los sucesos A="sacar un nº par"={2,4,6}, y B="sacar un número entre 2 y 4 (inclusive)"={2,3,4}.

   El suceso $A \cap B$ es tal que ocurren A y B a la vez, es decir:

   $A \cap B$="sacar un nº par y que esté entre 2 y 4 (inclusive)"={2,4}.

   El suceso $A \cap B$ son los elementos comunes a los conjuntos A y B (elementos que están en los dos conjuntos).

   Representado en diagramas de Venn:

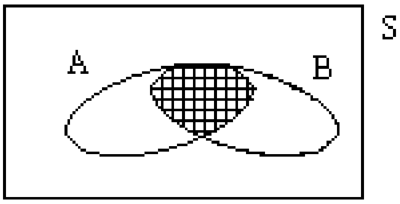

Figura 2.3: Intersección de sucesos: $A \cap B$

   En ocasiones podremos encontrarnos con sucesos que NO tengan elementos en común. En estos casos se dice que los sucesos A y B son *incompatibles*, y su intersección se representa con el conjunto vacío:

$$A \cap B = \varnothing$$

   Evidentemente, si los sucesos sí tienen intersección, diremos que son *compatibles.*

3. Unión de sucesos: Llamaremos *suceso unión* de los sucesos A y B y se representa por $A \cup B$ al suceso "ocurre A o bien ocurre B o bien ocurren ambos a la vez"(también podemos decir que "ocurre alguno").

   Es decir $A \cup B$ son los elementos que están en ambos conjuntos (aunque no necesariamente en los dos a la vez). Representado en diagrama de Venn:

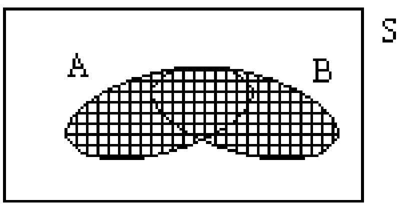

Figura 2.4: Unión de sucesos: $A \cup B$

Ejemplo: En el caso anterior:

$A \cup B$="sacar un nº par o un nº que esté entre 2 y 4 (inclusive)"={2,3,4,6}.

NOTA:

Observemos que la intersección de dos conjuntos siempre es "menor"que la unión, de hecho es "menor" que el propio conjunto.

Escrito matemáticamente:

$$A \cap B \subset A \cup B \quad A \cap B \subset A \quad A \cap B \subset B \quad A \subset A \cup B \quad B \subset A \cup B$$

(El símbolo $\subset$ significa "contenido", o que el primer conjunto es un subconjunto del segundo)

4. Suceso contrario de otro: Dado un suceso A, denominaremos *suceso contrario* de A y se representará por $\bar{A}$ (o bien $A^{'}$ o bien A^c) al suceso que tiene por elementos a todos aquellos que no pertenecen a A.

   Ejemplo: Si tiramos un dado, ya sabemos que el espacio muestral asociado es E={1,2,3,4,5,6}.

   Como antes, los sucesos A="sacar un nº par"={2,4,6}, por tanto $\bar{A}$={1,3,5} y B= "sacar un número entre 2 y 4 (inclusive)"={2,3,4}, de modo que $\bar{B}$={1,5,6}.

   En un diagrama de Venn:

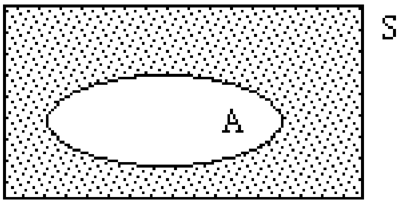

Figura 2.5: La parte punteada es $\bar{A}$.(Todo lo que no está incluido en A)

5. Diferencia de sucesos: Si A y B son dos sucesos, llamaremos diferencia entre A y B al suceso $B-A$, que consta de los elementos que están en B pero no están en A.Por ejemplo, si A={2,4,6}, B={2,3,4}, tenemos que $B - A$={3}. Se cumple que $B - A = B - A \cap B$, y también que $B - A = \bar{A} \cap B$. Representado en un diagrama de Venn:

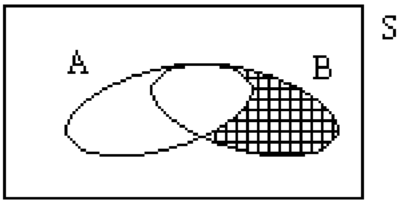

Figura 2.6: La parte rayada es $B - A$, todos los elementos de B que no estén en A

   De todas formas, hemos de ser cuidadosos con esta operación: No se debe confundir con una simple resta como operación numérica, sino que es una diferencia conjuntista, quitar los elementos comunes a dos conjuntos.

Ejercicio: En una urna tenemos 9 bolas numeradas del 1 al 9. Sacamos una y anotamos su número. Sean los sucesos: A="sacar un nº primo"B="sacar un nº cuadrado" (por ejemplo 4 es un número cuadrado, porque 4=2^2). Se pide:
a) Describir el espacio muestral.
b) ¿Cuántos elementos tiene el espacio de sucesos?.

c) Calcula $A \cap B$ y $A \cup B$.
d) ¿Son A y B compatibles o incompatibles?.
e) Calcula $\bar{A}$ y $\bar{B}$.
f) Si C="sale un número impar", calcula $A \cap C$, $B \cap C$,$\bar{C}$, $A \cup C$,$\bar{A} \cap \bar{C}$.

Propiedades de las operaciones con sucesos:

Las operaciones con sucesos tienen las siguientes propiedades, la mayoría de ellas bien conocidas:

	Intersección	Unión
Conmutativa	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Asociativa	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Idempotente	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Simplificación	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Elemento neutro	$A \cap E = A$	$A \cup \varnothing = A$
Absorción	$A \cup \varnothing = A$	$A \cup E = A$

Además de estas sencillas propiedades (que se demuestran fácilmente mediante un diagrama de Venn), las operaciones con sucesos tienen otras dos propiedades muy importantes:

Leyes de De Morgan: Si A y B son dos sucesos, se verifican:

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Demostración: Demostraremos la primera de las igualdades.

En primer lugar, representemos en un diagrama de Venn $\overline{(A \cup B)}$. Para ello, primero representamos $A \cup B$, y luego su contrario $\overline{(A \cup B)}$:

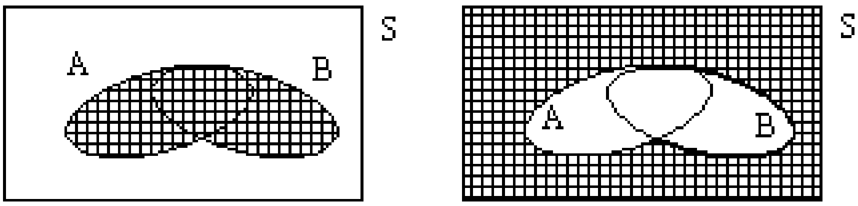

Figura 2.7: Imagen 1 corresponde a $A \cup B$. Imagen 2 corresponde a $\overline{A \cup B}$

Ahora, representaremos en otro diagrama el otro miembro, es decir $\bar{A} \cap \bar{B}$. En primer lugar, representaremos $\bar{A}$, luego $\bar{B}$ y luego su intersección:

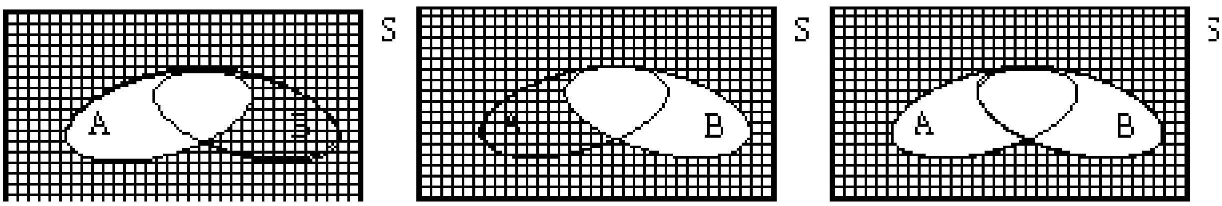

Figura 2.8: Imagen 1 corresponde a $\bar{A}$. Imagen 2 corresponde a $\bar{B}$. Imagen 3 corresponde a $\bar{A} \cap \bar{B}$.

Observando los dos resultados, vemos que las partes rayadas son iguales, por lo que la igualdad es cierta.

Ejercicio:

1. Mediante un procedimiento similar, demostrar la segunda ley de De Morgan.
2. Luisa y María interviene en un torneo de ajedrez. La primera que gane dos partidas seguidas o tres alternas gana el torneo. Encuentra el espacio muestral con todos los resultados posibles (suponemos que nunca hacen tablas).

   (Indicación: Utiliza un diagrama de árbol).
3. Consideramos el fenómeno aleatorio extraer una carta de una baraja de 40 y anotarla . Sean los sucesos A= "sacar oro", B= "sacar rey", C= "sacar el rey de bastos".

   Determina los sucesos:
   $$A \cap \bar{C}, A \cap B \cap C, \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}, \bar{A} \cup \bar{B}$$

2.4. Asignación de probabilidades. Regla de Laplace

Hasta el momento hemos descrito lo que es un experimento aleatorio y hemos definido los conceptos básicos asociados a este experimento. Nos falta responder a esta pregunta: ¿Cómo asignar probabilidades a cada uno de los sucesos de un experimento aleatorio?.

Hay muchas maneras de asignar probabilidades. La más sencilla e intuitiva la dio el matemático francés Pierre Simon Laplace (1749-1827), quién enunció la regla que lleva su nombre:

Regla de Laplace:

Si realizamos un experimento aleatorio en el que hay n sucesos elementales, todos igualmente probables, entonces si A es un suceso, la probabilidad de que ocurra el suceso A es:

$$p(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso A}}{\text{número de casos posibles}}$$

Ejemplo: Lanzamos un dado normal al aire. Consideramos el suceso A= "sale par". Calcular p(A).

Casos posibles hay 6, pues E={1,2,3,4,5,6}.

Casos favorables al suceso A={2,4,6}.

Por tanto $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0'5$.

(Notemos que la probabilidad siempre es un número positivo y menor, o a lo sumo igual a 1).

El inconveniente que plantea la definición de Laplace es que necesariamente los sucesos elementales tienen que tener la misma probabilidad de ocurrir.

Observemos un caso tan sencillo como el siguiente:

De una urna que contiene 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea :

a) roja
b) verde
c) amarilla

El espacio muestral en este caso sería: E={R,V,A}, que consta sólo de tres elementos, pero sería un poco ingenuo asignar las probabilidades mediante la regla de Laplace,

$$p(R) = \frac{1}{3} \quad p(V) = \frac{1}{3} \quad p(A) = \frac{1}{3}$$

porque ya intuitivamente se ve que hay más posibilidades, por ejemplo, de que salga una bola roja que de que salga una bola amarilla, de modo que ¿cómo asignar probabilidades?.

Fue el matemático ruso Kolmogorov quién precisó este término:

Definición axiomática de probabilidad:

Una probabilidad p es una función que asocia a cada suceso A del espacio de sucesos S , un número real p(A), es decir: $p : S \longrightarrow \mathbb{R}$, y que cumple las propiedades:

1. $0 \leq p(A) \leq 1$, (es decir, cualquier suceso tiene probabilidad positiva y menor o igual que 1).
2. $p(E) = 1$ (la probabilidad del suceso seguro es 1).
3. Si A y B son incompatibles, es decir $A \cap B = \varnothing$, entonces $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$. (es decir la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades si los sucesos tienen intersección vacía).

Ejemplo:

Sea un experimento aleatorio cualquiera y definamos en S (espacio de sucesos) la siguiente probabilidad:

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos del conjunto A}}{\text{número total de elementos}}$$

Comprobemos que p es una probabilidad.

Para ello, comprobemos las tres propiedades:

a) Se ve que la probabilidad de cualquier suceso está entre cero y uno, puesto que cualquier conjunto que tenga elementos ya tendrá probabilidad positiva, y el número de elementos de cualquier conjunto no puede ser mayor que el número total de elementos existentes.

b) p(E) = 1, es evidente.

c) Tomemos dos sucesos A y B que no tengan elementos en común. Entonces:

$$p(A \cup B) = \frac{\text{elementos que forman parte de A o de B}}{\text{número total de elementos}} =$$
$$= \frac{\text{número de elementos de A + número de elementos de B}}{\text{número total de elementos}} = p(A) + p(B)$$

puesto que si A y B no tienen elementos comunes, el número de elementos de la unión es la suma de los elementos de cada conjunto por separado.

Por tanto se cumplen las 3 propiedades y p así definida es una probabilidad. Esta será la definición de probabilidad que utilicemos a partir de ahora.

Ejemplo:

En el ejemplo de las urnas anterior, lo lógico es definir la probabilidad así: Como en total hay 20 bolas y 8 son rojas, 7 verdes y 5 amarillas, $p(R) = \frac{8}{20}$ $p(V) = \frac{7}{20}$ $p(A) = \frac{5}{20}$.

Se puede comprobar que así definida p es una probabilidad.

Sin embargo, comprobar las propiedades de la definición de Kolmogorov es una labor larga y engorrosa, puesto que hay que verificar que se cumple para todos aquellos sucesos del espacio de sucesos S, que es ciertamente amplio en muchas ocasiones. El siguiente resultado simplifica la tarea de decidir cuándo una función p sobre el espacio de sucesos es una probabilidad, basándose sólo en los sucesos elementales, es decir, aquellos que forman parte del espacio muestral. Lo enunciaremos sin demostración:

Propiedad

Si $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son los n sucesos elementales de un suceso aleatorio cualquiera,p una función $p : S \longrightarrow \mathbb{R}$ de modo que cumple las propiedades:

1. $0 \leq p(w_i) \leq 1 \ \ \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
2. $p(w_1) + p(w_2) + \ldots + p(w_n) = 1$

Entonces p es una probabilidad.

Ejemplo: Comprobar si las siguientes funciones definidas para los sucesos elementales son probabilidad, siendo E={a,b,c,d} el espacio muestral del experimento aleatorio:

a) $p(a) = \dfrac{1}{2}, p(b) = \dfrac{1}{3}, p(c) = \dfrac{1}{4}, p(d) = \dfrac{1}{5}$

Es obvio que la primera propiedad se cumple, puesto que las 4 probabilidades son números positivos menores que 1.

Para ver si se cumple la segunda, basta realizar la suma:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{30 + 20 + 15 + 12}{60} = \frac{77}{60}$$

que evidentemente NO es 1, luego p NO es probabilidad.

b) $p(a) = \dfrac{1}{4}, p(b) = \dfrac{1}{2}, p(c) = 0, p(d) = \dfrac{1}{2}$

Es obvio que la primera propiedad se cumple, puesto que las 4 probabilidades son números positivos o cero menores que 1.

Para ver si se cumple la segunda, basta realizar la suma:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1 + 2 + 1}{4} = 1$$

luego p SÍ es probabilidad.

Consecuencias de la definición de probabilidad:

1. $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

   En efecto, puesto que $E = A \cup \bar{A}$ y además A y $\bar{A}$ son incompatibles, resulta por la propiedad 3) de la definición que
   $$p(E) = p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A})$$
   Y por la propiedad 2), p(E)=1, luego $1 = p(A) + p(\bar{A})$ y por tanto $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

2. $p(\varnothing) = 0$

   Como $\bar{E} = \varnothing$, resulta que:
   $$p(\bar{E}) = p(\varnothing) = 1 - p(E) = 1 - 1 = 0$$

3. Si A y B son dos sucesos cualesquiera,
   $$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

4. Si A, B y C son tres sucesos cualesquiera,
   $$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

Ejemplo:
Se tira una moneda 3 veces. Calcular la probabilidad de obtener alguna cara.

Los problemas de este tipo, en los que se pide la probabilidad de obtener "alguna" cosa, se suelen resolver muy bien por paso al complementario. En este caso concreto, A = "obtener alguna cara".
$\bar{A}$= "no obtener ninguna cara"= "obtener 3 cruces".
Entonces, $p(A) = \frac{1}{8}$, pues hay 8 casos posibles (2·2·2, ¡haz el diagrama de árbol!) y sólo uno favorable (XXX, 3 cruces), por tanto:

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Ejercicio:
Calcular la probabilidad de obtener al menos 1 seis si se lanza 4 veces un dado.
Ejemplo:
Se lanza un dado dos veces y se suman las dos caras. Sea A el suceso A= "la suma de resultados es mayor o igual que 10" y B= "la suma de los resultados es múltiplo de 6". Calcular p(A), p(B) y $p(A \cap B)$.
Hay 36 posibles resultados al lanzar dos veces un dado. ¿Cuántos de ellos suman 10 o más?
Que sumen 10: (4,6), (5,5), (6,4)
Que sumen 11: (5,6), (6,5)
Que sumen 12: (6,6)
Por tanto, $p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
¿Cuántos hay que sumen múltiplo de 6?
Que sumen 6: (1,5), (2,4),(3,3), (4,2), (5,1)
Que sumen 12: (6,6)
Por tanto, $p(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
En cuanto a $A \cap B = (6, 6)$, luego $p(A \cap B) = \frac{1}{36}$.

Ejercicios:

1. Se ha encargado la impresión de una encuesta a una imprenta, que imprime 12 folios defectuosos de cada 1000. Hallar la probabilidad de que elegido un folio de la encuesta al azar:

   a) Esté mal impreso.

   b) Esté correctamente impreso.

2. Una bolsa contiene 8 bolas numeradas. Se extrae una bola y anota su número. Sean los sucesos A= "salir par", B= "salir impar", C= "salir múltiplo de 4".

   Calcular las probabilidades de $A \cup B, A \cup C, B \cup C, A \cup B \cup C$.

3. Extraemos una carta de una baraja española. Calcula:

   a) La probabilidad de que sea un rey o un as.

   b) La probabilidad de que sea un rey o una copa.

   c) La probabilidad de que sea un rey y una copa.

4. En el banquete posterior a una boda se sientan en la presidencia 10 personas, entre los cuales se encuentran los novios. Calcular la probabilidad de que los novios estén juntos en el centro de la mesa.

2.5. Probabilidad condicionada

Hasta ahora nos hemos limitado a calcular probabilidades únicamente partiendo de un experimento aleatorio, sin tener más información. Pero, ¿qué ocurre si conocemos alguna información adicional?.

Supongamos que estamos realizando el experimento aleatorio de lanzar un dado y obtener el número que sale. Consideremos el suceso A= “sale un 4”. Evidentemente, $p(A) = \frac{1}{6}$.

Ahora bien, ¿variaría esta probabilidad si al lanzar el dado alguien pasa por allí y nos dice que ha salido un número par?.

Disponemos entonces de una información adicional, B={2,4,6}.

Hemos reducido nuestro espacio muestral, que ahora sólo consta de 3 elementos y tenemos que cambiar las probabilidades asignadas.

Ahora el suceso A no tiene una posibilidad entre 6 de ocurrir, sino una entre tres, es decir, $p(A) = \frac{1}{3}$.

Esta es la idea de la probabilidad condicionada: La información obtenida B, modifica la probabilidad de A. Lo expresaremos así: $p(A/B) = \frac{1}{3}$ y se lee “probabilidad de A condicionada a B” o “probabilidad de A conociendo B”.

El caso anterior es muy sencillo, pues directamente podemos calcular $p(A/B)$, pero si el espacio muestral se amplía, el problema es más complicado. La fórmula siguiente simplifica el problema.

Definición:

Sea A un suceso aleatorio asociado a un experimento aleatorio, y sea B otro suceso que sabemos que se ha realizado.

Llamaremos *probabilidad de A condicionada a B* y lo expresaremos por $p(A/B)$ a la expresión:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

(de idéntico modo se define $p(B/A)$, escribe la fórmula).

Ejemplo: Para el caso anterior,

A={4},B={2,4,6} $\longrightarrow p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

$A \cap B = \{4\} \longrightarrow p(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

Luego:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

es lo mismo que obteníamos antes directamente.

Ejercicios:

1. Calcula la probabilidad de que la suma de las caras de dos dados sea mayor a igual que 10 sabiendo que en el primer dado ha salido un seis.

2. Se lanzan dos dados:¿cuál es la probabilidad de obtener una suma de puntos igual a siete?.

   Si la suma de puntos ha sido 7, ¿cuál es la probabilidad de que en alguno de los dados haya salido un 3?

2.6. Sucesos independientes

Si bien el conocer cierta información adicional modifica la probabilidad de algunos sucesos, puede ocurrir que otros mantengan su probabilidad, pese a conocer dicha información.

Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, consideremos los sucesos: A= "sacar un número par" y B= "sacar un número menor o igual que 2" Es claro que A= {2,4,6} y B= {1,2}.

Calculemos la probabilidad de A conociendo que se ha realizado el suceso B, es decir, $p(A/B)$.

Utilizando la fórmula:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0'5$$

puesto que $p(A \cap B)$=p(sacar par y menor o igual que 2)=$\frac{1}{6}$ y p(B)=$\frac{1}{3}$.

Pero si no conociésemos la información B, ¿cuál sería la probabilidad de A?.

p(A)=p(sacar par)=$\frac{3}{6} = 0'5$, es decir que p(A/B)=p(A), y por tanto el conocer la información B no modifica la probabilidad de A.

Cuando esto ocurre es decir, cuando $p(A/B) = p(A)$, diremos que los *sucesos A y B son independientes* (el hecho de que ocurra B no modifica la probabilidad de A).

Propiedad:

$$\text{A y B son sucesos independientes} \iff p(A \cap B) = p(A) \cdot (B).$$

Demostración: $\Longrightarrow$) Si A y B son independientes, $p(A/B) = p(A)$, y por la fórmula de la probabilidad condicionada,$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$, luego $\frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A)$, y por tanto $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

$\Longleftarrow$) Partiendo de $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$, entonces

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A) \cdot p(B)}{p(B)} = p(A)$$

luego $p(A/B) = p(A)$ y por tanto A y B son independientes.

Ejemplo:

En el caso anterior, $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$, y por otra parte $p(A) = \frac{1}{2}$ y $p(B) = \frac{1}{3}$,luego se cumple que

$$p(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = p(A) \cdot p(B)$$

luego A y B son independientes.

Ejercicio:

De dos sucesos conocemos que $p(A \cup B) = \frac{2}{3}$ y $p(A) = \frac{1}{5}$, calcula $p(A \cap B)$ y p(B) para que A y B sean independientes.

(Indicación: Utilizar la fórmula de la unión de dos sucesos y la de la independencia de sucesos).

(Solución: $p(B) = \frac{7}{12}, p(A \cap B) = \frac{7}{60}$).

NOTA IMPORTANTE:

No se deben confundir los conceptos de sucesos incompatibles y sucesos independientes. Dos sucesos son incompatibles cuando no tienen elementos en común, es decir, $A \cap B = \varnothing$, o con diagramas de Venn:

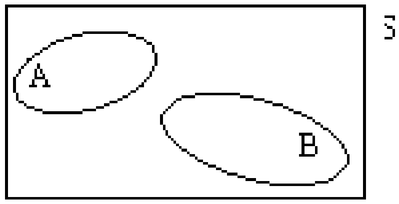

Figura 2.9: A y B incompatibles, sin elementos en común.

Dos sucesos son independientes si $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. Son conceptos totalmente distintos. Uno se refiere a CONJUNTOS y otro se refiere a PROBABILIDADES.

2.7. Experimentos compuestos. Teorema de la probabilidad total.

Un experimento compuesto es aquel que consta de dos o más experimentos aleatorios simples. Es decir, si tiramos un dado, o una moneda, son experimentos aleatorios simples, pero si realizamos el experimento de tirar un dado y posteriormente una moneda, estamos realizando un experimento compuesto.

Propiedad:

De la fórmula para calcular la probabilidad condicionada se deduce inmediatamente que:

$$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B) \quad \text{y} \quad p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$$

Ejemplo: Se extraen 2 cartas, sucesivamente, de una baraja de 40. Calcular la probabilidad de extraer 2 sotas.

Sea A = "sacar sota en la 1ª" y B = "sacar sota en la 2ª".

Nos piden $p(A \cap B)$.

Según la fórmula anterior, $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$.

Ahora bien , $p(A) = \dfrac{4}{40} = \dfrac{1}{10}$ y $p(B/A) = \dfrac{3}{39} = \dfrac{1}{13}$, por lo que $p(A) = \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{13} = \dfrac{1}{130}$.

La forma más sencilla de calcular probabilidades en experimentos compuestos es un digrama de árbol, donde en cada rama situamos la probabilidad que le corresponde al suceso del final de dicha rama. Estas probabilidades que se van poniendo en el árbol son probabilidades condicionadas, porque dependen de los resultados anteriores.

En el caso del ejercicio anterior, el diagrama sería:

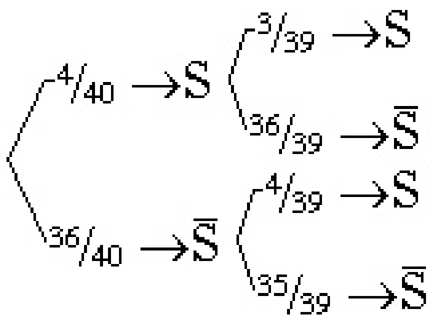

Figura 2.10: Diagrama de árbol para la extracción de sota(S) u otra carta ($\bar{S}$)

Nota:

Este mismo resultado se podría haber obtenido sin usar la probabilidad condicionada, del modo:

Formas de elegir 2 cartas de entre 40=$\binom{40}{2}$.

Formas de elegir 2 sotas entre 4=$\binom{4}{2}$.

Por la regla de Laplace, p(obtener 2 sotas)=$\dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{40}{2}} = \dfrac{6}{780} = \dfrac{1}{130}$.

Ejercicios:

1. Una urna contiene 9 bolas rojas y 5 negras. Se extraen sucesivamente 2 bolas. Calcula la probabilidad de que:

   a) la primera bola sea roja y la segunda negra.

   b) una sea roja y la otra negra.

2. En una bolsa hay 4 canicas rojas, 4 azules y 2 verdes. Se extraen 3 canicas que resultan ser 2 rojas y una azul. Sin devolverlas a la bolsa se saca otra canica, ¿de qué color es más probable que salga?.

Ejemplo:

Tenemos dos urnas, una con 7 bolas rojas y 2 azules, y otra con 3 bolas rojas y 8 azules. Tiramos un dado. Si nos sale un 3 o un 5, sacamos una bola de la primera urna y en caso contrario, sacamos una bola de la segunda urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea azul?.

Evidentemente estamos realizando un experimento compuesto. En primer lugar, se trata de elegir una urna, para lo cuál lanzamos un dado. Si U_1= "elegir la urna 1" y U_2= "elegir la urna 2", es claro que p(U_1)=$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ y p(U_2)=$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Por otra parte, luego realizamos otro experimento consistente en sacar una bola de la urna elegida. Si A= "sacar una bola azul", las probabilidades que conocemos son:

$$p(A/U_1) = \frac{2}{9}$$

y

$$p(A/U_2) = \frac{8}{11}$$

Lo que nos piden es p(A). Para calcular dicha probabilidad, si representamos el diagrama de árbol:

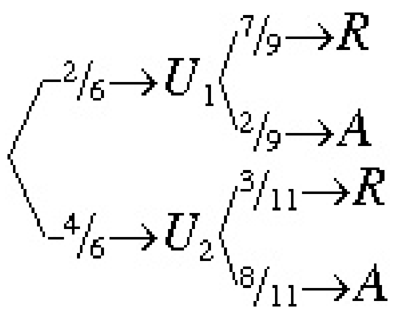

Figura 2.11: Diagrama de árbol para la extracción de bolas

Como la probabilidad de A depende de la urna en la que estemos, basta multiplicar las probabilidades de cada rama que llegue a la bola azul y luego sumar los 2 resultados, es decir:

$$p(A) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{9} + \frac{4}{6} \cdot \frac{8}{11} = \frac{4}{54} + \frac{32}{66} = \frac{166}{297} = 0'559$$

La justificación teórica para proceder así la da el *teorema de la probabilidad total.*

Teorema de la probabilidad total: Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos incompatibles 2 a 2, y cuya unión es el espacio muestral ($A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$), y B es otro suceso, resulta que:

$$\boxed{p(B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + \ldots + p(A_n) \cdot p(B/A_n)}$$

Nota: El conjunto $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que verifica la incompatibilidad 2 a 2 y que la unión de todos ellos es el espacio muestral se denomina *sistema completo de sucesos* y este sistema "divide el espacio muestral en partes que no se solapan". Mediante representación gráfica:

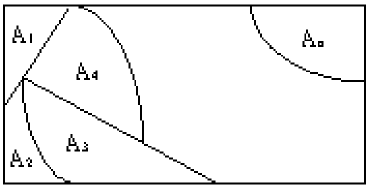

Figura 2.12: Sistema completo de sucesos: $A_1, A_2, \ldots, A_n$

Ejemplo: Para el caso anterior, A_1 = "sacar la bola de la urna 1".
A_2= "sacar la bola de la urna 2".
B= "sacar bola azul".
Y aplicando el teorema:

$$p(B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{9} + \frac{4}{6} \cdot \frac{8}{11} = \frac{4}{54} + \frac{32}{66} = \frac{166}{297} = 0'559$$

Ejemplo: En un colegio se imparten sólo los idiomas inglés y francés. El 80 % de los alumnos estudian inglés y el resto francés. El 30 % de los alumnos de inglés son socios del club musical del colegio y de los que estudian francés son socios de dicho club el 40 %. Se elige un alumno al azar. Calcular la probabilidad de que pertenezca al club musical.

En estos problemas es importante elegir el sistema completo de sucesos. En este caso: A_1= "estudiar inglés"
A_2= "estudiar francés"
B= "ser del club musical"
Nos piden p(B). Por el teorema anterior:

$$p(B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) = \frac{80}{100} \cdot \frac{30}{100} + \frac{20}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{8}{25} = 0'32$$

Mediante el diagrama de árbol:

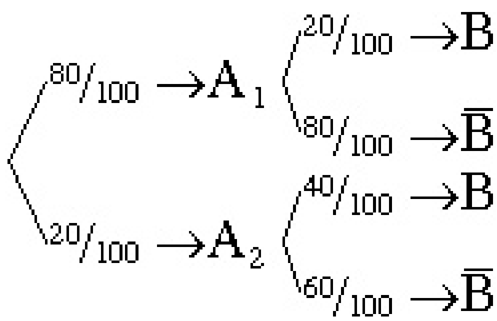

Figura 2.13: Diagrama de árbol para el problema de idiomas y club musical

Se obtiene el mismo resultado.

Ejercicio:

Se tienen dos urnas, la primera de las cuales tiene 6 bolas blancas, 4 negras y 2 rojas y la urna 2 tiene 3 bolas blancas y 7 negras.

Se lanza un dado al aire, y si sale múltiplo de 3 se saca de la primera urna y en otro caso se saca una bola de la segunda urna.

Calcular la probabilidad de que sea:

a) bola blanca b) bola negra c) bola roja.

Solución: $\frac{11}{30}$, $\frac{26}{45}$, $\frac{1}{18}$.

2.8. Tablas de contingencia

Las tablas de contingencia están referidas a 2 características que presentan cada una dos o más sucesos.

Ejemplo: En un taller se sabe que acuden, por la mañana 3 automóviles con problemas de eléctricos, 8 con problemas mecánicos y 3 con problemas de chapa. Por la tarde hay 2 con problemas eléctricos, 3 con problemas mecánicos y 1 con problemas de chapa.

a) Calcular el porcentaje de los que acuden por la tarde.

b) Calcular el porcentaje de los que acuden con problemas mecánicos

c) Calcular la probabilidad de que un automóvil con problemas eléctricos acuda por la mañana.

Resumiendo los datos en una tabla de contingencia:

	Pr. eléctricos	Pr. Mecánicos	Pr. de chapa	Total
Mañana	3	8	3	14
Tarde	2	3	1	6
Total	5	11	4	20

a) En total acuden 20 y por la tarde acuden 6, luego:

p(acudir por la tarde)=$\dfrac{6}{20} = 0'3$, es decir, el 30 %.

b) En total acuden 20 y con problemas mecánicos hay 11, luego:

p(problemas mecánicos)=$\dfrac{11}{20} = 0'55$, es decir, el 55 %.

c) Aquí tenemos una información adicional (es un coche que tiene problemas eléctricos), luego se trata de una probabilidad condicionada.Con problemas eléctricos hay 5 y de ellos 3 por la mañana, luego:

p(acudir por la mañana/problemas eléctricos)=$\dfrac{3}{5} = 0'6$, es decir, el 60 %.

En una tabla de contingencia puede que nos falten datos, pero se pueden hallar fácilmente con los datos que son conocidos.

Ejemplo Para tratar de curar una enfermedad se aplica un tratamiento nuevo a 81 pacientes de un hospital, mientras que en el mismo hospital hay otros 79 pacientes que siguen un tratamiento antiguo contra la misma enfermedad. En total, con ambos tratamientos los curados son 103, de los cuales 60 lo son gracias al tratamiento nuevo. Si tratamos de construir la tabla, con los datos del problema se obtiene:

	Tratamiento antiguo	Tratamiento nuevo	Total
Curarse		60	103
No curarse			
Total	79	81	

Completa la tabla y responde a las cuestiones:
Si se elige un individuo al azar, calcula la probabilidad de que:

1. Se haya curado.
2. No se haya curado.
3. Se haya curado con el nuevo tratamiento.
4. No se haya curado con el nuevo tratamiento.
5. Se haya curado con el tratamiento antiguo.
6. No se haya curado con el tratamiento antiguo

2.9. El teorema de Bayes.

Como consecuencia del teorema de la probabilidad total y de las propiedades de la probabilidad condicionada, resulta este importante teorema que permite calcular probabilidades condicionadas.

Teorema de Bayes:
Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos incompatibles 2 a 2, y cuya unión es el espacio muestral $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E)$, y B es otro suceso, resulta que:

$$\boxed{p(A_i/B) = \frac{p(A_i) \cdot p(B/A_i)}{p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + \ldots + p(A_n) \cdot p(B/A_n)}}$$

Demostración:
Por definición,$p(A_i/B) = \dfrac{p(A_i \cap B)}{p(B)}$.
Ahora bien, recordando que $p(A_i \cap B) = p(A_i) \cdot p(B/A_i)$, debido a que $p(B/A_i) = \dfrac{A_i \cap B}{p(A_i)}$.
Por tanto, combinando los dos hechos:

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A_i) \cdot p(B/A_i)}{p(B)}$$

Como por el teorema de la probabilidad total es:

$$p(B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + \ldots + p(A_n) \cdot p(B/A_n)$$

resulta que sustituyendo:

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i) \cdot p(B/A_i)}{p(B)} = \frac{p(A_i) \cdot p(B/A_i)}{p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + \ldots + p(A_n) \cdot p(B/A_n)}$$

y el teorema queda demostrado.

Nota:
Las probabilidades $p(A_i)$ se denominan probabilidades *a priori*.
Las probabilidades $p(A_i/B)$ se denominan probabilidades *a posteriori*.
Las probabilidades $p(B/A_i)$ se denominan *verosimilitudes*.

Ejemplo:

Dos clases de 2º de Bachillerato, una de 28 alumnos y otra de 35 alumnos hacen conjuntamente un examen de Matemáticas. La probabilidad de aprobar de los alumnos de la primera clase es de 0'68 y los de la segunda del 0'73. Se toma un examen al azar y resulta que está aprobado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de un alumno de la 1ª clase?.

Sea A_1= "el examen es de un alumno de la primera clase"

A_2= "el examen es de un alumno de la segunda clase"

B= "el examen está aprobado"

Nos piden $p(A_1/B)$.

Hagamos antes que nada un diagrama de árbol:

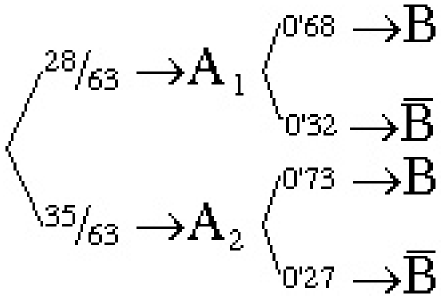

Figura 2.14: Diagrama de árbol para el problema del examen

Por el teorema de Bayes:

$$p(A_1/B) = \frac{p(A_1)\cdot p(B/A_1)}{p(A_1)\cdot p(B/A_1) + p(A_2)\cdot p(B/A_2)}$$

Sustituyendo:

$$p(A_1/B) = \frac{\dfrac{28}{63}\cdot 0'68}{\dfrac{28}{63}\cdot 0'68 + \dfrac{35}{63}\cdot 0'73} = \frac{0'302}{0'708} = 0'427$$

$p(A_1)$ es la probabilidad "a priori", es decir , antes de realizar el experimento y careciendo de información.

En este caso $p(A_1) = \dfrac{28}{63} = 0'444$.

$p(A_1/B)$ es la probabilidad "a posteriori", después de realizarlo y conocer más información. En este caso $p(A_1/B) = 0'427$ (es algo menor).

Ejercicio:

Se tienen dos urnas. En la primera hay 10 bolas blancas, 7 negras y 5 rojas. En la segunda 24 blancas, 4 negras y 9 rojas. Se elige una urna al azar y se saca una bola. Calcular:

a) Probabilidad de sacar bola blanca.

b) Sabiendo que la bola extraída es blanca, probabilidad de que provenga de la segunda urna.

Solución:$\frac{449}{814}$, $\frac{264}{449}$.