SISTEMAS DE ECUACIONES

¿ Cuántas veces habrás intentado resolver un problema de ingenio ? Muchas, ¿ verdad ?

El indio Toro Sentado había conseguido en una de sus andanzas, cazar un águila de la que obtuvo 189 plumas, artículo muy estimado especialmente entre jefes de tribu, ya que se utilizaban para hacer toda clase de adornos personales.
Toro Sentado estaba muy contento pues con ellas podría conseguir pieles suficientes para hacer un toldo nuevo. Como aún no se conocía el dinero, el intercambio se realizaba en base a objetos y de acuerdo a la siguiente escala:
12 plumas de águila por 6 flechas, 9 flechas equivalían a 4 lanzas, 15 lanzas se cambiaban por 5 cuchillos de piedra, cada cuchillo se cotizaba igual que un machete y por 8 machetes se obtenían 40 pieles de oso.
¿ Cuántas pieles de oso consiguió Toro Sentado a cambio de 189 plumas ?

Es posible que te encuentres con algunas dificultades para plantear este problema.
Nuestra propuesta es entonces escribir los datos en un cuadro en forma sistematizada.

Escala de intercambio de objetos

12 plumas	**6 flechas**
9 flechas	**4 lanzas**
15 lanzas	**5 cuchillos**
1 cuchillo	**1 machete**
8 machetes	**40 pieles**

Es decir si usamos los símbolos:

pl : pluma — **c**: cuchillo

f: flecha — **m**: machete

l: lanza — **pi**: piel

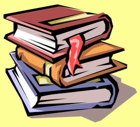
el enunciado nos indica que:

$$\begin{aligned} 12\ pl &= 6\ f \\ 9\ f &= 4\ l \\ 15\ l &= 5\ c \\ c &= m \\ 8\ m &= 40\ pi \end{aligned}$$

Este conjunto de igualdades o ecuaciones tiene como característica que todas ellas están relacionadas entre sí.
En matemática a estos conjuntos se los llama ***Sistemas de ecuaciones.***

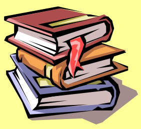
DEFINICIÓN

Llamaremos Sistema de Ecuaciones a todo conjunto de ecuaciones relacionadas entre sí. En cada una de ellas figuran una ó más incógnitas.

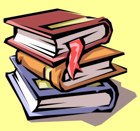


DEFINICIÓN

S_0 es una solución del sistema de ecuaciones si y sólo si S_0 satisface cada una de las ecuaciones del sistema.
Si el sistema tiene n incógnitas x_1 , x_2 , x_3 , ..., x_n entonces S_0 es una n - úpla de la forma
$(x_1^0, x_2^0,\ldots, x_n^0)$



DEFINICIÓN
Resolver un sistema significa hallar todas sus soluciones



Trataremos ahora de determinar cuantas pieles de oso pudo obtener Toro Sentado con 189 plumas utilizando la escala de intercambio que te indicamos en el cuadro.

$$189 \text{ pl} = 189 \ \frac{1}{2}\text{f} = \frac{189}{2}\cdot\frac{4}{9}\text{l} = \frac{189}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}\text{c} = \frac{189}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}\text{m} = \frac{189}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}\cdot 5\text{pi} = 70 \ \text{pi}$$

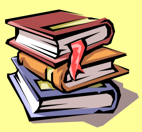
Toro Sentado consiguió 70 pieles de oso para su nuevo toldo.

A partir de aquí nos proponemos resolver sistemas de ecuaciones algebraicas. En particular trataremos sistemas de ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones mixtos.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

DEFINICIÓN

Diremos que un sistema de ecuaciones es un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas si y sólo si cada ecuación del sistema es una ecuación lineal.



EJEMPLO:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS

Una compañía de aviación tiene una flota de 55 aviones de los cuales hay 20 bimotores. Los restantes tienen tres y cuatro motores. Si en toda la flota hay 170 motores ¿cuántos aviones de tres motores hay? ¿y de cuatro?

Llamamos

b = cantidad de aviones bimotores
t = cantidad de aviones trimotores
c = cantidad de aviones cuatrimotores

Planteamos nuestro problema:

$$\begin{cases} b = 20 \\ b + t + c = 55 \\ 2b + 3t + 4c = 170 \end{cases}$$

o el sistema equivalente:

$$\begin{cases} b = 20 \\ c = 35 - t \\ 3t + 4(35 - t) = 130 \end{cases}$$

Resolvemos y obtenemos: t = 10 y c = 25

Solución: 10 trimotores
25 cuatrimotores

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es simplemente un conjunto de ecuaciones de la forma :

$$S: \begin{cases} a_{11}\, x + a_{12}\, y = b_1 \\ a_{21}\, x + a_{22}\, y = b_2 \end{cases} \qquad a_{i,j} \in R \;\; ; \;\; b_i \in R$$

El par (x_0 , y_0) es una solución del sistema S si y sólo si al reemplazar en cada ecuación del sistema , x por x_0 e y por y_0 , se obtienen dos identidades numéricas.

Interpretación geométrica de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

Será de gran ayuda la interpretación geométrica de los sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, para la resolución de los mismos y la posterior interpretación de los resultados .

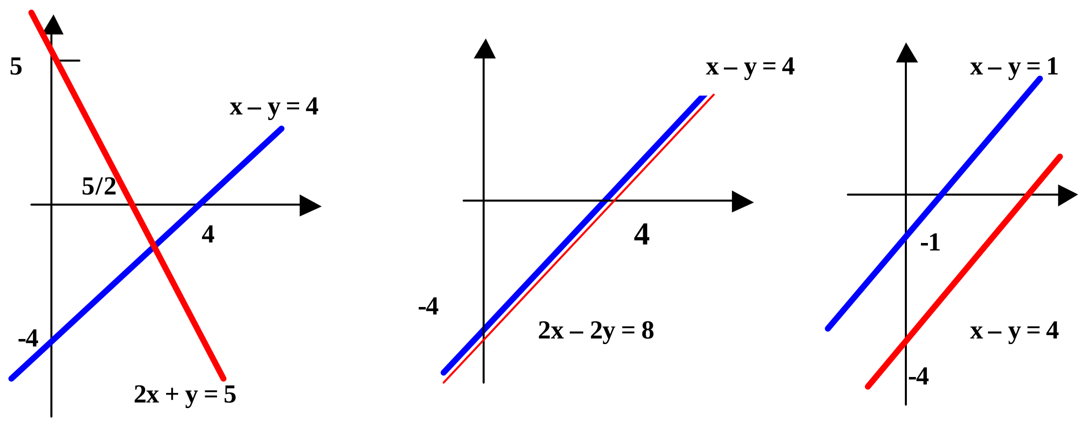
Recuerda que si a y b son dos números no simultáneamente nulos, entonces la gráfica de la ecuación $a\,x + b\,y + c = 0$ es una recta del plano.

Luego un sistema de la forma : $\begin{cases} a_1\, x + b_1\, y = c_1 \\ a_2\, x + b_2\, y = c_2 \end{cases}$ representa en el plano coordenado "xy" dos rectas.

Los sistemas:

$\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x - y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Representan las rectas:



Como vemos hay sólo tres casos posibles:

1- **Las rectas se cortan en un punto.**

2- **Las rectas son coincidentes.**

3- **Las rectas son paralelas**

¿Puede existir otro caso?

¿Las rectas pueden tener sólo dos puntos en común?

Si tienes dudas, consulta con tus compañeros o con tu profesor.
Recuerda que estamos todos juntos en esta tarea.

Traduciremos estas características de las gráficas de dos rectas al análisis de las soluciones de los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

1 - **El sistema tiene solución única (x_0 , y_0).**
El par (x_0 , y_0) es el único punto de intersección de las rectas.
2 - El sistema tiene infinitas soluciones.
Los infinitos pares de coordenadas de los puntos de la recta son soluciones del sistema. Las rectas son coincidentes.
3 - El sistema no tiene solución.
Las rectas no tienen puntos en común, son paralelas.

El sistema de ecuaciones S es *compatible o consistente* si y sólo si admite por lo menos una solución.

El conjunto solución es no vacío.

El sistema S es *compatible determinado* si tiene solución única.

El conjunto solución está formado por un único par.

El sistema S es *compatible indeterminado* si tiene infinitas soluciones.

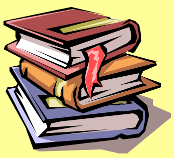
El conjunto solución está formado por infinitos pares.

El sistema S es incompatible o inconsistente si no admite solución.

El conjunto solución es vacío.

Para resolver los sistemas de ecuaciones lineales se suele trabajar con sistemas simplificados equivalentes al dado.

DEFINICIÓN



Sistemas Equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones algebraicas son equivalentes si y sólo si tienen el mismo conjunto solución.

Dado el sistema $S_1 : \begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

Podemos formar un **sistema equivalente** al dado, si reemplazamos la segunda ecuación por la suma de las dos ecuaciones

$$S^*_1 : \begin{cases} x - y = 4 \\ 3x = 9 \end{cases}$$

El conjunto solución de ambos sistemas es
{ 3 , -1 }

¿ Cómo puede obtenerse un sistema equivalente a uno dado ?

Por medio de dos operaciones elementales :

- Multiplicando los dos miembros de una ecuación por un mismo número real no nulo.
- Reemplazando una de las dos ecuaciones por la suma de las dos ecuaciones del sistema.

EJEMPLO :

Son equivalentes

$$\mathbf{S_1} : \begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \quad \mathbf{S_2} : \begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ 3x - 6y = -6 \end{cases} \quad \mathbf{S_3} : \begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases} \quad \mathbf{S_4} : \begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ 11y = 9 \end{cases}$$

Llegó el momento de resolver sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Repasaremos tres métodos de resolución :

☺ **Método de Sustitución.**

☺ **Método de Igualación.**

☺ **Método de Sumas y Restas.**

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$$\boxed{x - y = 4} \qquad \boxed{2x + y = 5}$$

Despejamos la incógnita x de la primera ecuación.

$$\boxed{x = y + 4} \quad (1)$$

Reemplazamos este valor en la segunda ecuación.

$$\boxed{2(y + 4) + y = 5}$$

Si resolvemos esta ecuación con una incógnita obtenemos el valor de y.

$$\boxed{y = -1}$$

Para hallar el correspondiente valor de x reemplazamos y en (1)

$$\boxed{x = 3}$$

El sistema tiene solución única : el conjunto solución es S = { (3 , - 1) }.

MÉTODO DE IGUALACIÓN

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$$x - y = 4 \qquad\qquad 2x + y = 5$$

Despejamos la misma incógnita de ambas ecuaciones.

$$x = y + 4 \qquad (1) \qquad x = \frac{5 - y}{2}$$

Igualamos los dos valores de x.

$$y + 4 = \frac{5 - y}{2}$$

Resolvemos esta ecuación de primer grado en y ,obteniendo el valor de y.

$$\boxed{y = -1}$$

Reemplazamos este valor de y en una de las dos ecuaciones (1) y obtenemos el correspondiente de x.

$$\boxed{x = 3}$$

El sistema tiene solución única : el conjunto solución es S = { (3 , - 1) }.

MÉTODO DE SUMAS Y RESTAS

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

(1) $x - y = 4$ $\qquad$ $2x + y = 5$

Obtengamos la suma de las dos ecuaciones del sistema.

$3x = 9$

Encontramos el valor de x.

$\boxed{x = 3}$

Remplazamos el valor de x en (1) y obtenemos el correspondiente valor de y.

$\boxed{y = -1}$

El sistema tiene solución única : el conjunto solución es S = { (3 , - 1) }.

Un sistema con infinitas soluciones

Sea el sistema:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases}$$

Lo resolvemos por el método de sustitución :

$$x - y = 4 \quad\quad 2x - 2y = 8$$

$$x = y + 4 \;\longrightarrow\; 2(y + 4) - 2y = 8$$

$$2y - 2y + 8 = 8$$

$$(1) \quad \boxed{0\,y = 0}$$

La ecuación (1) se satisface para todo valor de y.

El sistema es compatible indeterminado .

El sistema tiene infinitas soluciones : el conjunto solución es

$$S = \{ (a + 4 , a) , \ a \in R \}$$

Un sistema sin solución

Sea el sistema

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Lo resolvemos por el método de igualación

$x - y = 4$ $\rightarrow$ **$x = y + 4$**

$x - y = 1$ $\rightarrow$ **$x = y + 1$**

$y + 4 = y + 1$

$\downarrow$

(1) **$0\,y = -3$**

La ecuación (1) no tiene solución .

El sistema es incompatible.

En este ejemplo la inconsistencia del sistema es evidente.
Fue resuelto sólo para justificar la falta de solución.

El sistema no tiene solución :
Entonces el conjunto solución es
S = { } = f

EJERCICIOS

1- Resuelve:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - y = 2 \\ x - \frac{3}{2}y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ \frac{1}{2}x - y = 2 \end{cases}$

2- La Empresa Cerámica La Plata, fabrica platos y tazas. Para cada plato o taza un trabajador mide una cantidad fija de material y la pone en la máquina que la forma, de allí pasa luego al vidriado y secado automático. En promedio el trabajador necesita 3 minutos para realizar el proceso de fabricación de una taza y dos para un plato. El material para una taza cuesta 25 centavos y el de un plato 20 centavos.
Si en un día determinado se asignan $44 para la producción ¿cuántos platos y cuántas tazas pueden fabricarse ese día si se trabajan 8 horas?