# Productos notables

Cuando realizamos operaciones entre polinomios con el fin de resolver problemas, es muy frecuente encontrar algunas operaciones que por su naturaleza, aparecen en muchos fenómenos.

Debido a que las vamos a encontrar muy seguido, las llamamos *productos notables*, porque también, una vez identificado el tipo de producto, podemos decir el resultado de esa operación sin necesidad de realizarla...

La realidad es que la memorizamos para no tener que desarrollar el producto cada vez que la encontremos.

Cada uno de los productos notables tiene su nombre.

**Definición 1**

Productos notables

*Los productos notables más comunes son:*

*(i)* *Binomio al cuadrado (suma).* $(x+a)^2 = x^2 + 2\,a\,x + a^2$

*(ii)* *Binomio al cuadrado (diferencia).* $(x-a)^2 = x^2 - 2\,a\,x + a^2$

*(iii)* *Producto de binomios con término común.* $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)\,x + a\,b$

*(iv)* *Producto conjugado.* $(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$

*(v)* *Binomio al cubo.* $(x+a)^3 = x^3 + 3\,a\,x^2 + 3\,a^2\,x + a^3$

Para entender los productos notables puedes imaginarlos como si se tratara de un molde.

Tú debes realizar lo que el molde dice, de acuerdo a los valores que debes asignar a cada parte del molde.

**Ejemplo 1**

Calcula: $(2\,m+7)^2$=

- Primero identificamos el producto notable con el que vamos a trabajar.
- En este caso se trata de un binomio que está elevado al cuadrado, es decir, el producto notable *(i)*.
- Es muy sencillo observar que podemos sustituir los valores de acuerdo a la fórmula:

$$(x+a)^2 = (x)^2 + 2\,(a)\,(x) + (a)^2$$

- Si sustituimos y luego realizamos los cálculos que quedan indicados, terminamos:

$$\begin{aligned}(x+a)^2 &= (x)^2 + 2\,(a)\,(x) + (a)^2\\ (2\,m+7)^2 &= (2\,m)^2 + 2\,(7)(2\,m) + (7)^2\\ &= 4\,m^2 + 28\,m + 49\end{aligned}$$

- Esto significa que:

$$(2\,m+7)^2 = 4\,m^2 + 28\,m + 49$$

**Ejemplo 2**

Calcula: $(3\,z-4)^2 =$

- Sustituimos en la fórmula del producto notable correpondiente:

$$\begin{aligned}(x-a)^2 &= (x)^2 - 2\,(a)\,(x) + (a)^2\\ \left(3\,z^2-4\right)^2 &= \left(3\,z^2\right)^2 - 2\,(4)\left(3\,z^2\right) + (4)^2\\ &= 9\,z^4 - 24\,z^2 + 16\end{aligned}$$

- Aunque, también pudimos haberlo calculado con el producto notable *(i)*, considerando: $a = -4$.

$$\begin{aligned}(x+a)^2 &= (x)^2 + 2\,(a)\,(x) + (a)^2\\ \left(3\,z^2+(-4)\right)^2 &= \left(3\,z^2\right)^2 + 2\,(-4)\left(3\,z^2\right) + (-4)^2\\ &= 9\,z^4 - 24\,z^2 + 16\end{aligned}$$

- Así, podemos concluir que los productos notables *(i)* y *(ii)* son el mismo.

---

Algunas veces necesitarás elevar un binomio al cuadrado con coeficientes fraccionarios. El siguiente ejemplo muestra uno de esos casos.

**Ejemplo 3** Calcula: $\left(\frac{1}{2}\,x + 4\,y^2\right)^2 =$

- Empezamos identificando al producto notable que se trata: en este caso, es un binomio al cuadrado.
- Ahora aplicamos la fórmula que le corresponde:

$$\left(\frac{1}{2}\,x + 4\,y^2\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\,x\right)^2 + 2\,\left(\frac{1}{2}\,x\right)\cdot(4\,y^2) + \left(4\,y^2\right)^2$$

- Ahora simplemente realizamos las operaciones que quedaron indicadas:

$$\left(\frac{1}{2}\,x\right)^2 + 2\,\left(\frac{1}{2}\,x\right)\cdot\left(4\,y^2\right) + \left(4\,y^2\right)^2 = \frac{1}{4}\,x^2 + 4\,x\,y^2 + 16\,y^4$$

- Observa que hemos aplicado leyes de los exponentes.

---

Ahora estudiaremos el caso del producto de dos binomios con un término común. Empezamos con un ejemplo muy sencillo.

**Ejemplo 4** Calcula: $(x+5)(x-7) =$

- Ahora tenemos que utilizar el producto notable:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)\,x + a\,b$$

- En este caso, $a = 5$, y $b = -7$.

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= x^2 + (a+b)\,x + a\,b\\ (x+5)(x-7) &= x^2 + (5+(-7))\,x + (5)(-7)\\ &= x^2 - 2\,x - 35\end{aligned}$$

- En conclusión,

$$(x+5)(x-7) = x^2 - 2\,x - 35$$

---

Algunas veces, además de aplicar el producto notable que le corresponde a la operación que estamos desarrollando debemos, además, aplicar las leyes de los exponentes.

Calcula: $(x^3+1)(x^3+5) =$ **Ejemplo 5**

- Este producto también requiere del uso de la fórmula:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)\,x + a\,b$$

- Pero en este caso requiere además de la aplicación de las leyes de los exponentes:

$$\begin{aligned}(x^3+1)(x^3+5) &= \left(x^3\right)^2 + (1+5)\cdot x^3 + 1\cdot 5\\ &= x^6 + 6\,x^3 + 5\end{aligned}$$

- Observa que cuando sustituimos en la fórmula los términos del ejercicio, nos queda en el primer término: $\left(x^3\right)^2$, lo cual nos exige la aplicación de las leyes de los exponentes.

---

También debes tener cuidado cuando tengas un coeficiente en alguno de los términos, porque muchas veces se omite multiplicar por él.

Calcula: $(2\,x+11)(2\,x-13) =$ **Ejemplo 6**

- Aplicamos directamente los términos a la fórmula:

$$\begin{aligned}(2\,x+11)(2\,x-13) &= (2\,x)^2 + (11-13)\cdot(2\,x) + (11)\cdot(-13)\\ &= 4\,x^2 + (-2)\cdot(2\,x) - 143\\ &= 4\,x^2 - 4\,x - 143\end{aligned}$$

- Observa que hemos aplicado las leyes de los signos cuando multiplicamos $(11)\cdot(-13)$.
- También es importante notar que al sumar $11 - 13$ obtenemos un número negativo, porque el mayor de los sumandos es menor a cero.
- En este último caso **no** se han aplicado las leyes de los signos.
- Por ejemplo, la suma: $13 - 11 = 2$. Un número positivo, a pesar de que un sumando es positivo y otro es negativo.

Cuando aplicamos las leyes de los signos generalmente decimos «*menos por más*», o «*menos por menos*». Observa, siempre utilizamos la palabra «*por*» entre los dos signos. Esto indica que estamos multiplicando los signos. Por eso no podemos utilizarlos cuando estamos sumando. Solamente para la multiplicación o para la división.

**No** aplicamos las leyes de los signos porque **no** estamos multiplicando o dividiendo; estamos sumando números.

Seguramente ahora tendrás la pregunta: «*¿por qué para la división también, si no estamos diciendo menos entre mas?*»

Recuerda que dividir es igual a multiplicar por el recíproco. Por ejemplo, dividir por 2 es igual que multiplicar por el recíproco de 2, es decir, es igual que multiplicar por $1/2$.

Podemos justificar el uso de las leyes de los signos en la división si observamos que las operaciones de multiplicación y división son contrarias basados en las leyes de los signos mismas.

Hasta aquí hemos visto cómo desarrollar binomios al cuadrado y producto de binomios con un término común. Ahora vamos a estudiar el producto conjugado.

**Ejemplo 7** Calcula: $(3\,u + 5\,v)(3\,u - 5\,v) =$

- Empezamos notando que se trata de un producto conjugado.
- Eso significa que utilizaremos la fórmula:

$$\begin{aligned}(x + a)(x - a) &= (x)^2 - (a)^2\\ (3\,u + 5\,v)(3\,u - 5\,v) &= (3\,u)^2 - (5\,v)^2\\ &= 9\,u^2 - 25\,v^2\end{aligned}$$

- Esto nos indica que:

$$(3\,u + 5\,v)(3\,u - 5\,v) = 9\,u^2 - 25\,v^2$$

---

Observa que en realidad estamos aplicando las leyes de los exponentes y de los signos. Sin embargo, nos ahorramos todo el procedimiento al aplicar directamente la fórmula. Para verificar que estamos aplicando debes realizar el producto sin aplicar el producto notable.

**Ejemplo 8** Calcula: $(3\,x^2 + 11)(3\,x^2 - 11) =$

- Empezamos aplicando directamente la fórmula:

$$\begin{aligned}(3\,x^2 + 11)(3\,x^2 - 11) &= \left(3\,x^2\right)^2 - 11^2\\ &= 9\,x^4 - 121\end{aligned}$$

- Una segunda forma de verificar el resultado consiste en aplicar el producto conjugado que corresponde al producto de binomios con un término común.
- Aplicando esta fórmula, obtenemos:

$$\begin{aligned}(3\,x^2 + 11)(3\,x^2 - 11) &= \left(3\,x^2\right)^2 + (11-11)(3\,x^2) + (11)(-11)\\ &= 9\,x^4 + 0\,(3\,x^2) - 121\\ &= 9\,x^4 - 121\end{aligned}$$

En ambos casos obtenemos el mismo resultado porque el producto conjugado es un caso especial del producto de binomios con un término común.

Calcula: $\left(\frac{m^3}{4}+\frac{12}{13}\right)\left(\frac{m^3}{4}-\frac{12}{13}\right)=$ **Ejemplo 9**

- Aplicamos la fórmula:

$$\begin{aligned}\left(\frac{m^3}{4}+\frac{12}{13}\right)\left(\frac{m^3}{4}-\frac{12}{13}\right) &= \left(\frac{m^3}{4}\right)^2-\left(\frac{12}{13}\right)^2\\ &= \frac{m^6}{16}-\frac{144}{169}\end{aligned}$$

- Recuerda que elevar al cuadrado significa multiplicar un número por sí mismo.
- Elevar al cuadrado **no** significa miltiplicar por 2.
- Por ejemplo, $9^2 = 9\times 9 = 81$, es correcto, pero
- $9^2 \neq 9\times 2 = 18$ no es la forma correcta de proceder.
- Ten cuidado con esto.

Finalmente unos ejemplos para aprender a elevar un binomio al cubo.

Calcula: $(2\,m+5)^3 =$ **Ejemplo 10**

- Ahora tenemos un binomio elevado al cubo.
- Empezamos sustituyendo los valores en donde les corresponde:

$$\begin{aligned}(x+a)^3 &= (x)^3+3\,(a)(x)^2+3\,(a)^2(x)+(a)^3\\ (2\,m+5)^3 &= (2\,m)^3+3\,(5)(2\,m)^2+3\,(5)^2(2\,m)+(5)^3\\ &= 8\,m^3+60\,m^2+150\,m+125\end{aligned}$$

- Entonces,

$$(2\,m+5)^3 = 8\,m^3+60\,m^2+150\,m+125$$

Calcula: $(2\,r-5)^3 =$ **Ejemplo 11**

- En este caso tenemos una diferencia elevada al cubo.
- Como se trata de un binomio, podemos aplicar la fórmula:

$$(x+a)^3 = (x)^3+3\,(a)(x)^2+3\,(a)^2(x)+(a)^3$$

- Pero debemos tener cuidado con los signos...

$$\begin{aligned}(2\,r-5)^3 &= (2\,r)^3+3\,(-5)(2\,r)^2+3\,(-5)^2(2\,r)+(-5)^3\\ &= 8\,r^3+(-15)(4\,r^2)+6\,r\,(25)-125\\ &= 8\,r^3-60\,r^2+150\,r-125\end{aligned}$$

- Observa que cuando un factor está elevado al cuadrado debemos elevarlo al cuadrado antes de multiplicarlo por los demás factores.

---

Observa también que cuando multiplicamos, el orden en que realizamos las multiplicaciones, cuando se trata de varios factores, no importa; siempre obtenemos el mismo resultado. Esto es así por la propiedad de conmutatividad de la multiplicación de los números reales.

**Ejemplo 12** Calcula: $\left(\dfrac{2\,x}{3}+\dfrac{r^2}{5}\right)^3=$

- No tienes por qué sentir pánico al ver la expresión que debemos elevar al cubo.
- Simplemente la vamos a tratar como a las anteriores: sustituimos los términos en la fórmula, realizamos las operaciones que quedan indicadas y simplificamos hasta donde sea posible:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2\,x}{3}+\frac{r^2}{5}\right)^3 &= \left(\frac{2\,x}{3}\right)^3+3\left(\frac{r^2}{5}\right)\left(\frac{2\,x}{3}\right)^2+3\left(\frac{r^2}{5}\right)^2\left(\frac{2\,x}{3}\right)+\left(\frac{r^2}{5}\right)^3\\ &= \frac{8\,x^3}{27}+\left(\frac{3\,r^2}{5}\right)\left(\frac{4\,x^2}{9}\right)+\left(\frac{6\,x}{3}\right)\left(\frac{r^4}{25}\right)+\frac{r^6}{125}\\ &= \frac{8\,x^3}{27}+\frac{12\,r^2\,x^2}{45}+\frac{6\,x\,r^4}{75}+\frac{r^6}{125}\\ &= \frac{8\,x^3}{27}+\frac{4\,r^2\,x^2}{15}+\frac{2\,x\,r^4}{25}+\frac{r^6}{125}\end{aligned}$$

- Recuerda simplificar las fracciones siempre que sea posible.
- Debes tener cuidado al elevar al cubo un número.
- Elevar al cubo significa multiplicar por sí mismo tres veces, no multiplicar por 3.
- Por ejemplo, $2^3=3\times3\times3=27$, pero
- $2^3\neq2\times3=6$, es un error común en muchos estudiantes.

---

En cualquiera de los casos que se desarrollan en este tema, podemos verificar que los resultados son los correctos desarrollando la multiplicación indicada en cada caso utilizando el procedimiento que aprendimos en el tema anterior.

Evidentemente, el procedimiento será más laborioso que la aplicación de los productos notables.

De hecho, los productos notables se utilizan para realizar más rápido esos cálculos.

# Créditos

| **Albert Einstein** | Todo debe hacerse tan simple como sea posible, pero no más. |
|---|---|

Este material se extrajo del libro *Matemáticas I* escrito por Efraín Soto Apolinar. La idea es compartir estos trucos para que más gente se enamore de las matemáticas, de ser posible, mucho más que el autor.

---

**Autor:** Efraín Soto Apolinar.

**Edición:** Efraín Soto Apolinar.

**Composición tipográfica:** Efraín Soto Apolinar.

**Diseño de figuras:** Efraín Soto Apolinar.

**Productor general:** Efraín Soto Apolinar.

**Año de edición:** 2010

**Año de publicación:** Pendiente.

**Última revisión:** 22 de agosto de 2010.



Espero que estos trucos se distribuyan entre profesores de matemáticas de todos los niveles y sean divulgados entre otros profesores y sus alumnos.

Este material es de distribución gratuita.

Profesor, agradezco sus comentarios y sugerencias a la cuenta de correo electrónico:

*efrain@aprendematematicas.org.mx*