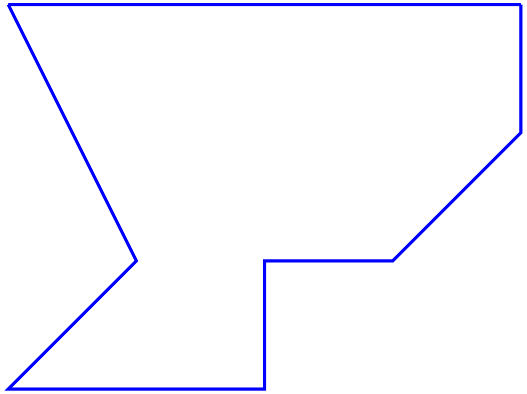
Teselaciones

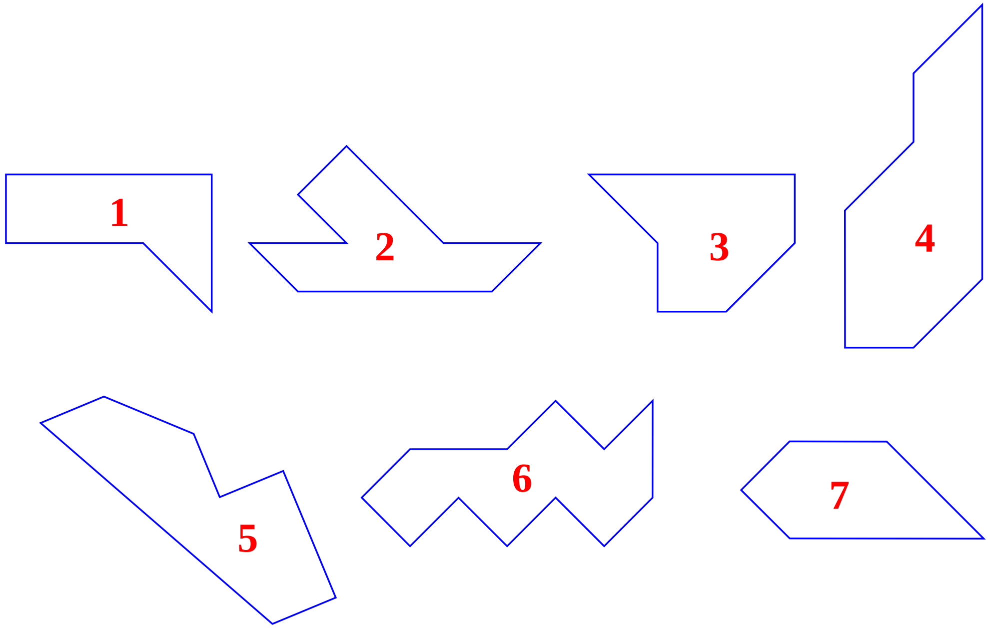
Federico Ardila
Universidad de Washington
Seattle WA EEUU

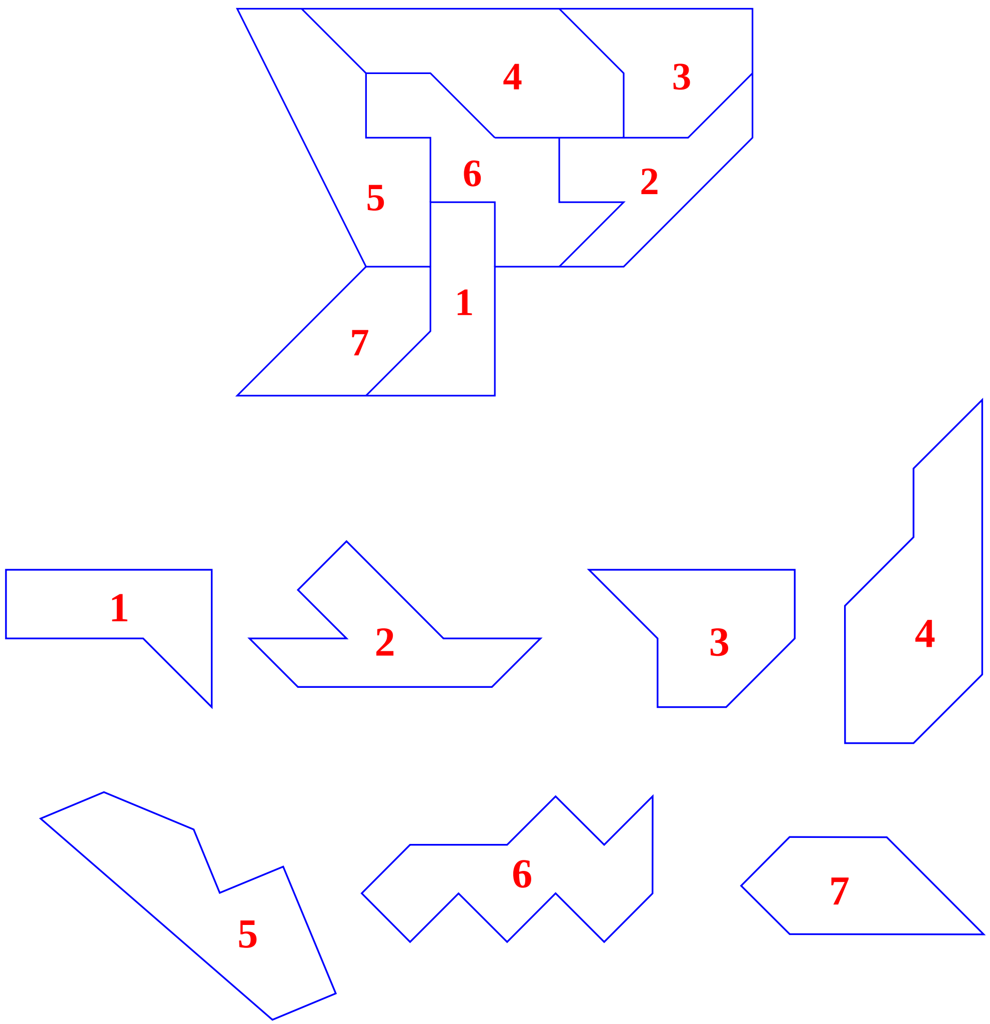
Congreso Nacional de Matemáticas
Bogotá, 8 de agosto de 2005

Pregunta: ¿Es posible teselar esta región



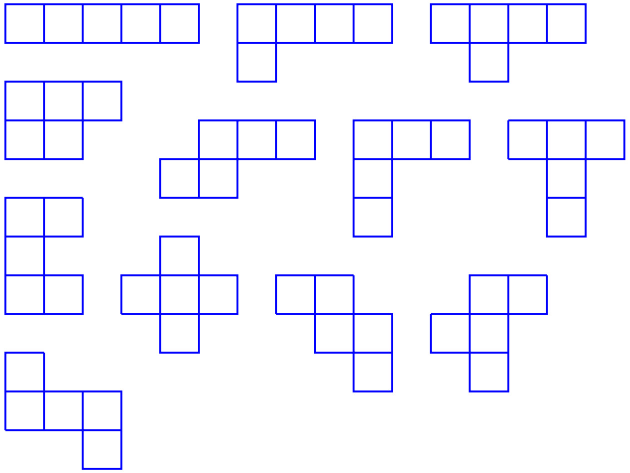
usando estas fichas?



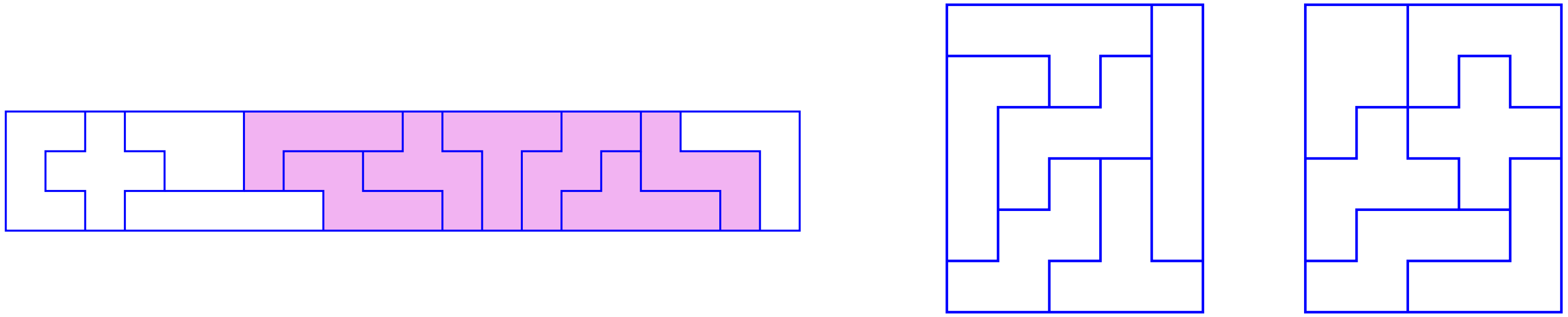


Respuesta: Es posible, pero no muy interesante.

El tablero y las fichas deberían ser interesantes matemáticamente.



E.g., los 12 pentominós teselan un tablero de 3×20 o dos de 5×6



de una forma esencialmente única.

Ésto es un poco más interesante, pero no muy profundo.

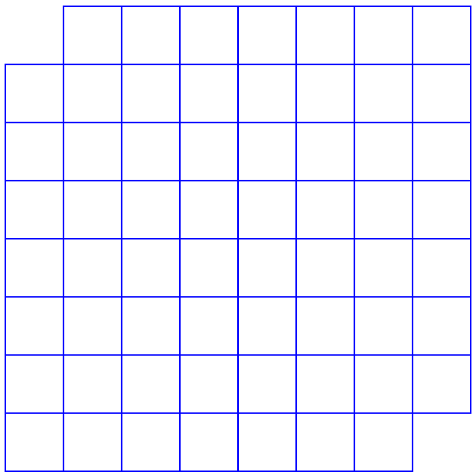
Definición: Una teselación es una forma de llenar un tablero con fichas que no se superponen, ni se salen del tablero.

El plan a seguir:

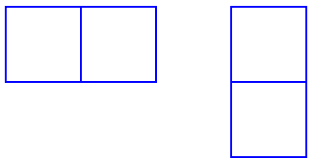
1. ¿Existe una teselación?
2. ¿Cuántas teselaciones hay?
3. ¿Más o menos cuántas teselaciones hay?
4. ¿Cómo es una teselación "típica"?
5. ¿Qué invariantes algebraicos tiene una teselación?
6. ¿Qué tan regular o irregular puede ser una teselación?
7. ¿Qué utilidad tiene contestar estas preguntas?

1. ¿Existe una teselación?

Una pregunta más fácil, pero más interesante:

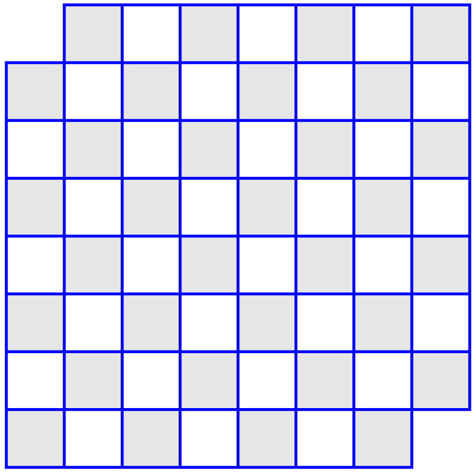


¿Es posible teselar este tablero con 31 dominós (o *dímeros*)?



No es posible.

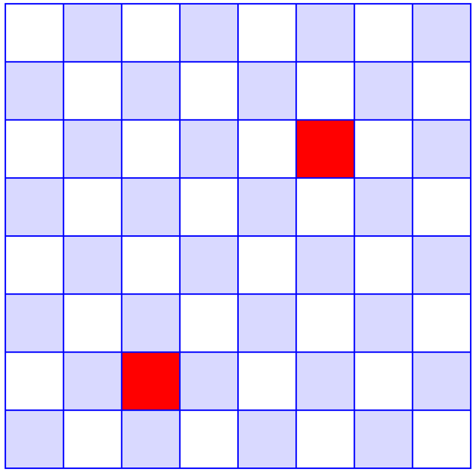
Coloreemos el tablero como si fuera de ajedrez.



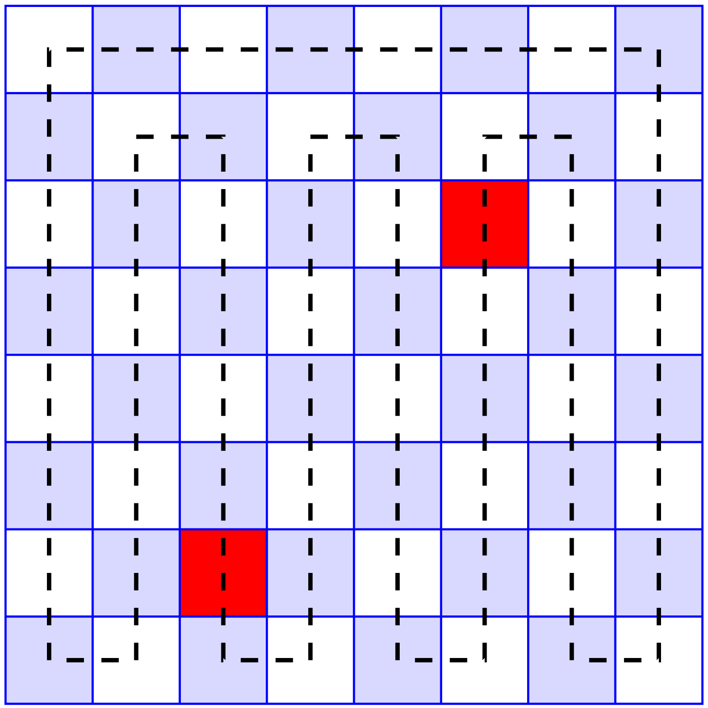
- Cualquier dominó va a cubrir una casilla blanca y una negra.
- El tablero tiene 32 casillas blancas y 30 negras.

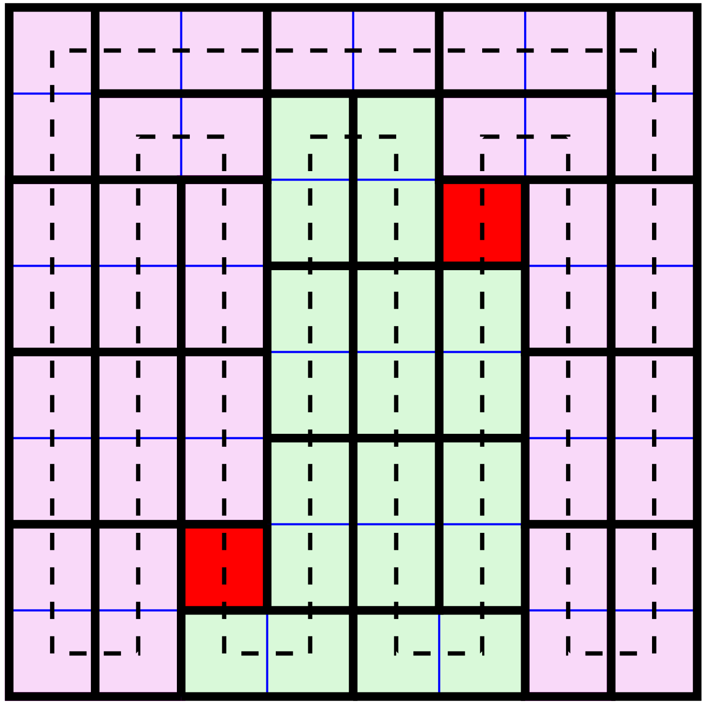
Éste es el ejemplo más sencillo de un *argumento de coloración*.

Si elimino una casilla blanca y una negra, ¿será posible teselar el tablero que resulta?

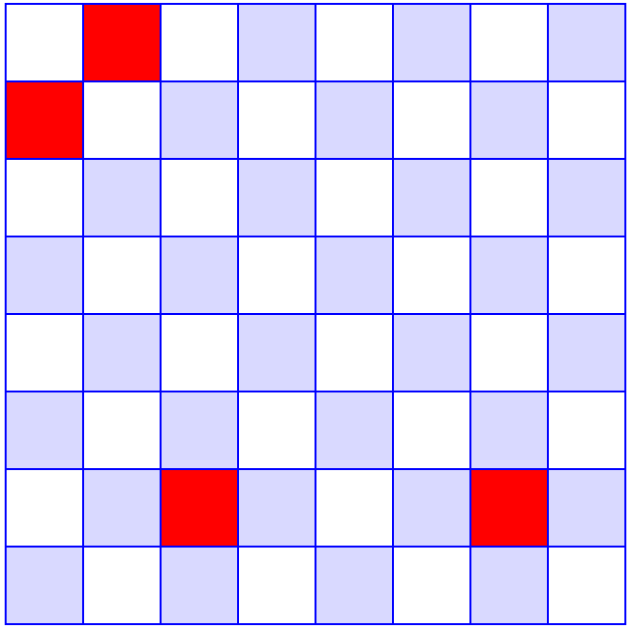


Sí es posible, sin importar cuáles casillas sean eliminadas.





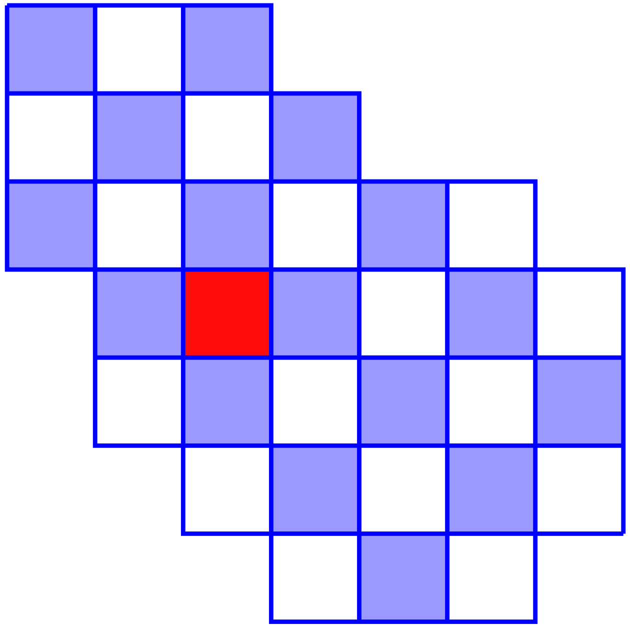
¿Qué pasa si elimino dos casillas blancas y dos negras?



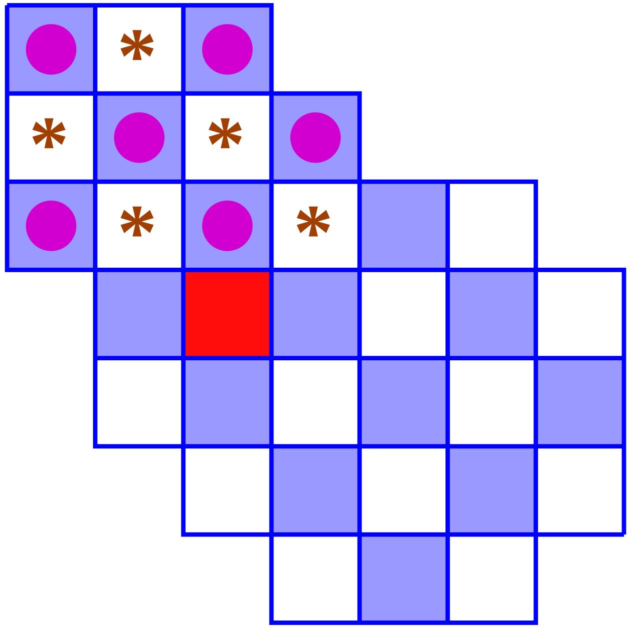
A veces es posible, y a veces no.

Pregunta: Si elimino k casillas blancas y k casillas negras, ¿cuándo puedo teselar el tablero con dominós?

Por ejemplo, este tablero tiene 16 casillas blancas y 16 negras, pero no puede ser teselado con dominós.



Una explicación: Hay un “conjunto deficiente de casillas” - una especie de cuello de botella.



Las seis casillas negras con ● son adyacentes a un total de sólo cinco casillas blancas $*$!

¡Ésta es la única explicación posible!

Teorema del matrimonio. (Hall, 1935.)

Un tablero puede ser teselado con dominós si y sólo si no existe un "conjunto de casillas infelices".

Idea: Hombres y mujeres que sólo están dispuestos a casarse con sus vecinos. Para k mujeres necesitamos por lo menos k esposos.

Éste es el inicio de la teoría de emparejamientos.

Podemos permitir que cada persona le asigne puntajes a sus posibles parejas, y encontrar el mejor emparejamiento posible.

- Muchas aplicaciones en la práctica.
- Conexiones con optimización y teoría de matroides.

Es fácil determinar si es posible teselar una región dada con dominós.

¡Pero esta pregunta es muy difícil para casi cualquier conjunto de fichas! Por ejemplo:

Teorema. (Beauquier et al, 1995.)

No existe un algoritmo que decida si un tablero puede ser teselado con rectángulos 1×3 y 3×1.

(Este problema es **NP-completo**.)

2. ¿Cuántas teselaciones hay?

Un resultado poco interesante:

Teorema. (Un computador, 1965.)

El número de teselaciones de un rectángulo de 6×10 con los 12 pentominós es 2339.

El primer resultado interesante:

Teorema. (Kasteleyn, Fisher-Temperley, 1961.)

El número de teselaciones de un rectángulo de $2m \times 2n$ con $2mn$ dominós es:

El primer resultado interesante:

Teorema. (Kasteleyn, Fisher-Temperley, 1961.)

El número de teselaciones de un rectángulo de $2m \times 2n$ con $2mn$ dominós es:

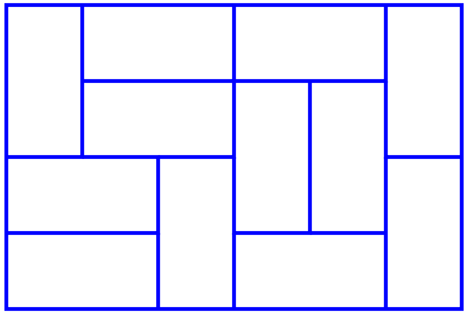
$$4^{mn} \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} \left(\cos^2 \frac{j\pi}{2m+1} + \cos^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right).$$

Acá Π denota un producto, y $\pi = 180°$. E.g.,

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \cos 72° = 0.3090169938 \cdots$$

Para $m = 2$, $n = 3$:

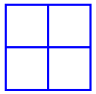
$$\begin{aligned} & 4^6(\cos^2 36^\circ + \cos^2 25.71^\circ)(\cos^2 72^\circ + \cos^2 25.71^\circ) \\ & \times(\cos^2 36^\circ + \cos^2 51.43^\circ)(\cos^2 72^\circ + \cos^2 51.43^\circ) \\ & \times(\cos^2 36^\circ + \cos^2 77.14^\circ)(\cos^2 72^\circ + \cos^2 77.14^\circ) \\ = \quad & 4^6(1.466\ldots)(.907\ldots)(1.043\ldots)(.484\ldots)(.704\ldots)(.145\ldots) \\ = \quad & 281 \end{aligned}$$



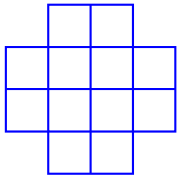
- mecánica estadística: dímeros en una retícula rectangular
- permanente $\rightarrow$ determinante $\rightarrow$ vectores y valores propios

Otra situación interesante: teselar diamantes aztecas con dominós.

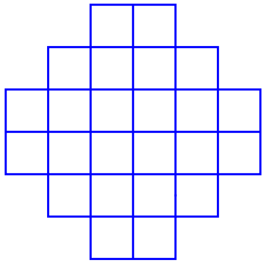
Por ejemplo, AZ(2) tiene 8 teselaciones.



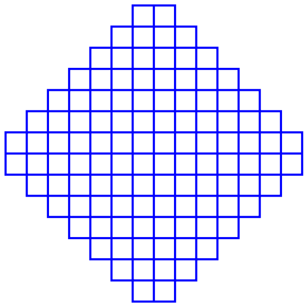
AZ(1)



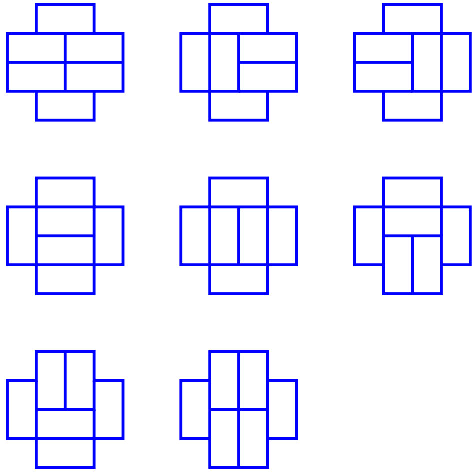
AZ(2)



AZ(3)



AZ(7)



Número de teselaciones de AZ(n):

1	2	3	4	5	6	7
2	8	64	1024	32768	2097152	268435456

Teorema. (Elkies, Kuperberg, Larson, Propp, 1992.)

El número de teselaciones de un diamante azteca $\mathrm{AZ}(n)$ con dominós es

$$2^{n(n+1)/2}.$$

EKLP dan cuatro demostraciones; ahora hay aproximadamente 12:

- evaluación de determinantes
- teoría de representaciones del grupo general lineal $GL(n, \mathbb{C})$
- algorítmica
- biyectiva

Ninguna demostración es tan sencilla como la respuesta.

3. ¿Más o menos cuántas teselaciones hay?

Ya sabemos cuántas formas hay de teselar un rectángulo.

Pero, ¿sí sabemos?

- ¿Qué tan grande es

$$T(200 \times 200) = 4^{100000} \prod_{j=1}^{100} \prod_{k=1}^{100} \left(\cos^2 \frac{j\pi}{201} + \cos^2 \frac{k\pi}{201} \right) ?$$

- Un diamante Azteca y un cuadrado "se parecen". Entre dos "del mismo tamaño", ¿cuál tiene más teselaciones?

Si una región tiene N casillas y T teselaciones, tiene

$\sqrt[N]{T}$ **grados de libertad por casilla**.

Por ejemplo, AZ(n) tiene $N = 2n(n+1)$ casillas y $T = 2^{n(n+1)/2}$ teselaciones. El número de grados de libertad por casilla es:

$$\sqrt[N]{T} = \sqrt[4]{2} = \mathbf{1.189207115\ldots}$$

Teorema. (Kasteleyn, Fisher-Templerley, 1961.)

El número de teselaciones de un cuadrado de $2n \times 2n$ con dominós es aproximadamente C^{4n^2}, donde

$$C = e^{\left(1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots\right)/\pi} = \mathbf{1.338515152\ldots}$$

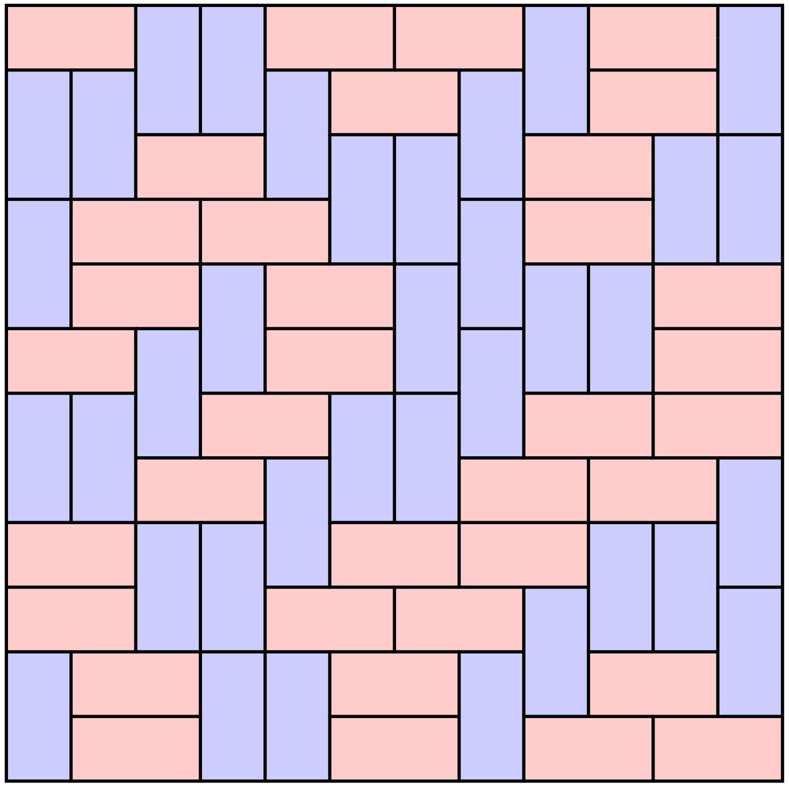
El tablero cuadrado es "más fácil de teselar" que el diamante azteca, ya que $1.3385\ldots > 1.1892\ldots$.

En cierto sentido, el cuadrado es el tablero "más fácil de teselar".

4. ¿Cómo es una teselación típica?

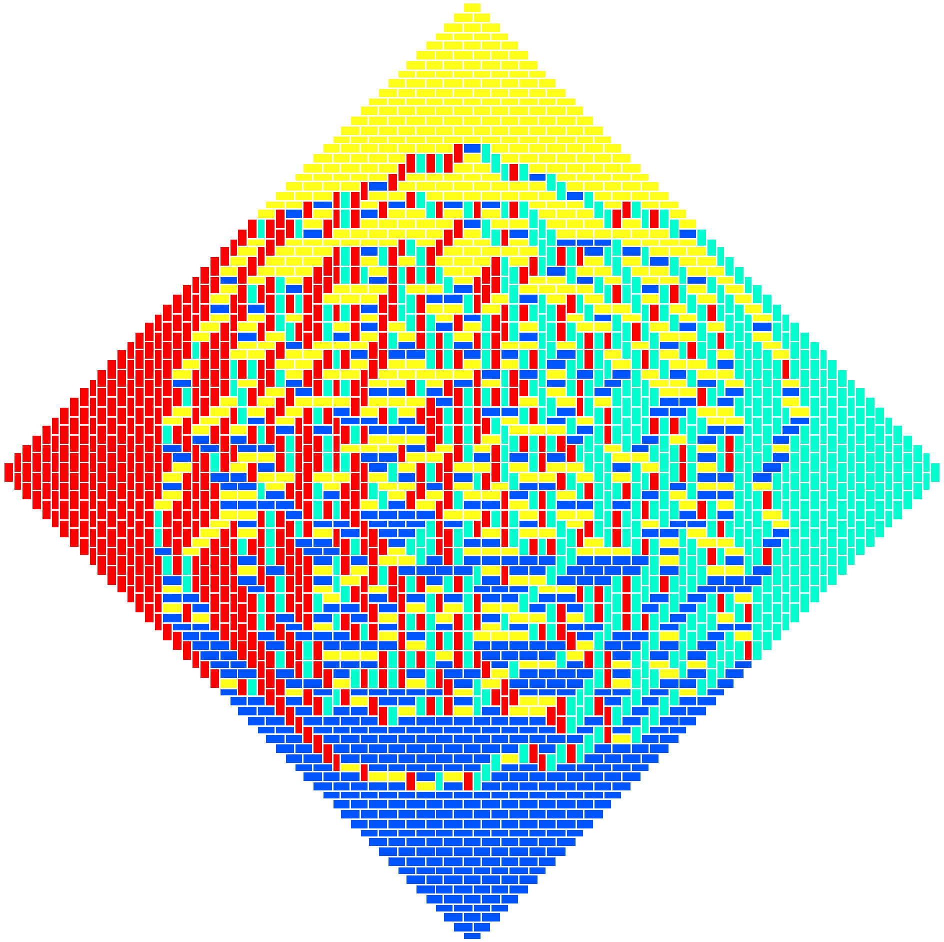
El cuadrado y el diamante Azteca son cualitativamente diferentes.

Una teselación aleatoria de un cuadrado:



Esta teselación no exhibe ninguna estructura obvia.

Comparémosla con una teselación aleatoria de un diamante azteca:

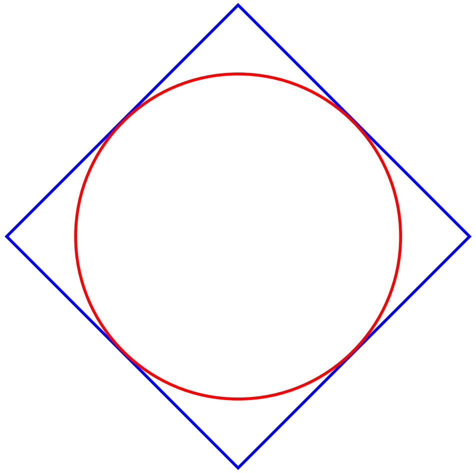


¡Ésta es totalmente regular en las esquinas, y caótica en la mitad!

¿Podemos describir la región del medio?

Teorema. (Jockusch, Propp, Shor, 1995.)

Para n “muy grande”, “casi todas” las teselaciones del diamante azteca $\mathrm{AZ}(n)$ exhiben una zona de regularidad “muy cercana” al exterior del círculo ártico tangente a los cuatro lados del diamante.



Las definiciones de “muy grande”, “casi todas” y “muy cercana” son técnicas, pero explican lo que vemos en los dibujos.

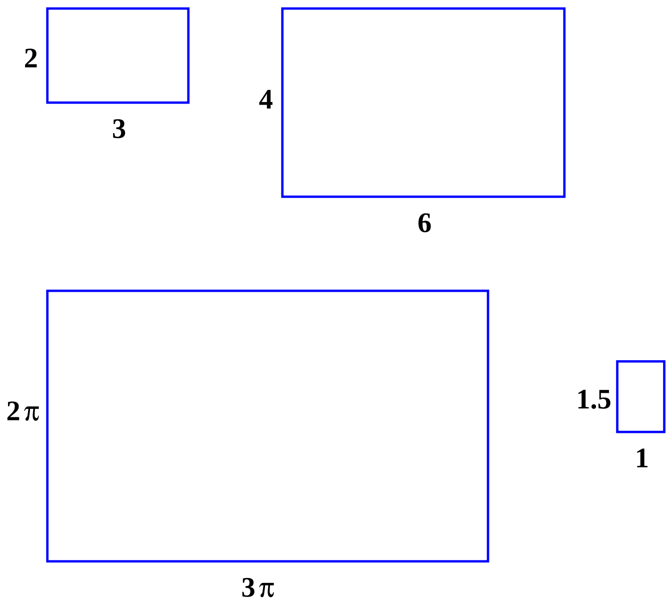
Este es sólo uno de muchos resultados probabilísticos de este tipo.

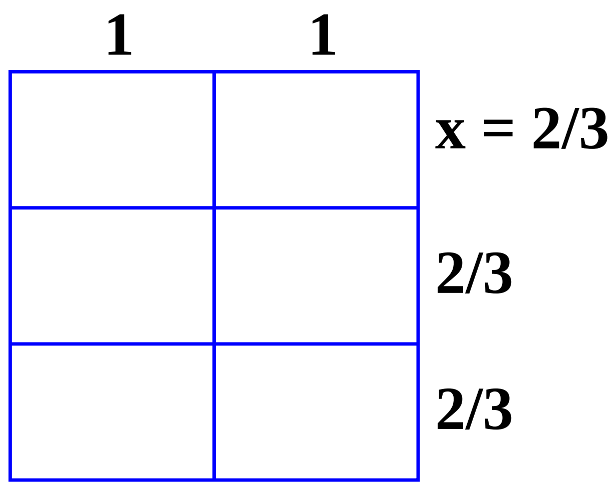
5. Métodos algebraicos.

Sea $x > 0$; por ejemplo, $x = \sqrt{2}$.

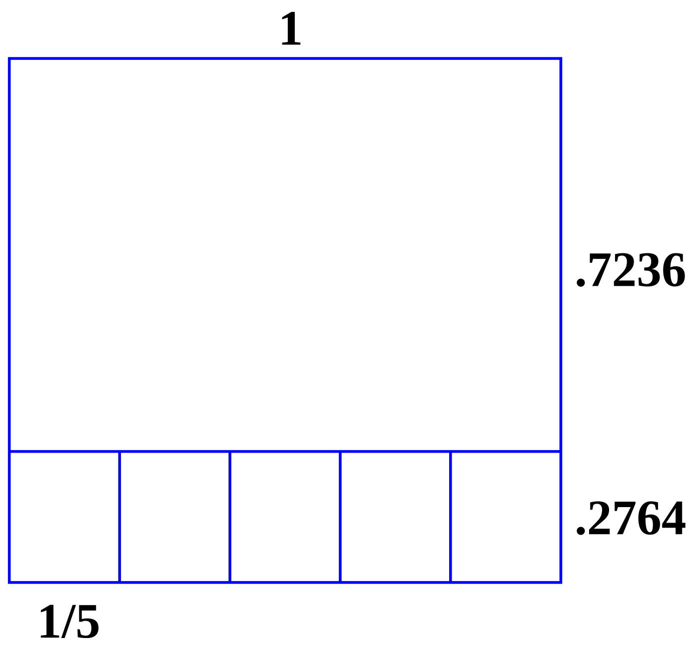
Pregunta.

¿Para cuáles $x > 0$ es posible teselar un cuadrado con rectángulos semejantes al rectángulo $1 \times x$, es decir, rectángulos de la forma $a \times ax$?





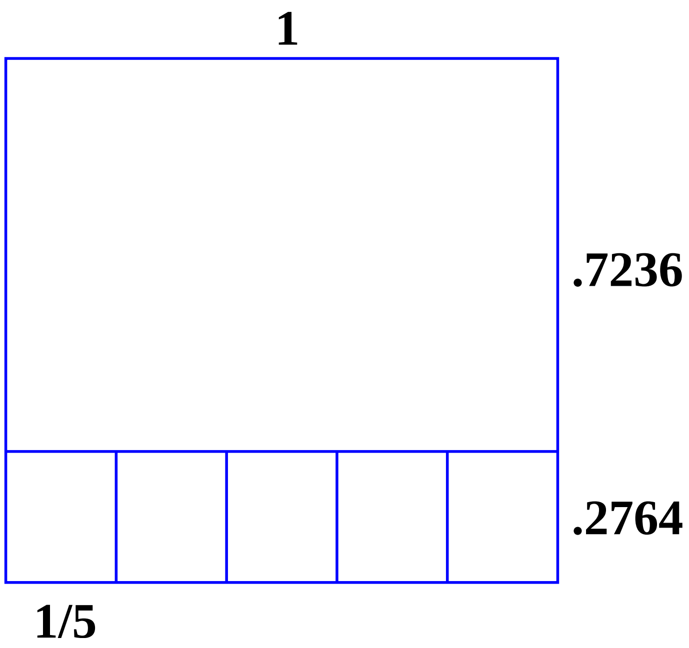
Para $x = \frac{2}{3}$ sí es posible.



$$x(1-x) = \frac{1}{5}$$

$$5x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$x = \frac{5+\sqrt{5}}{10} = 0.7236067977\ldots$$



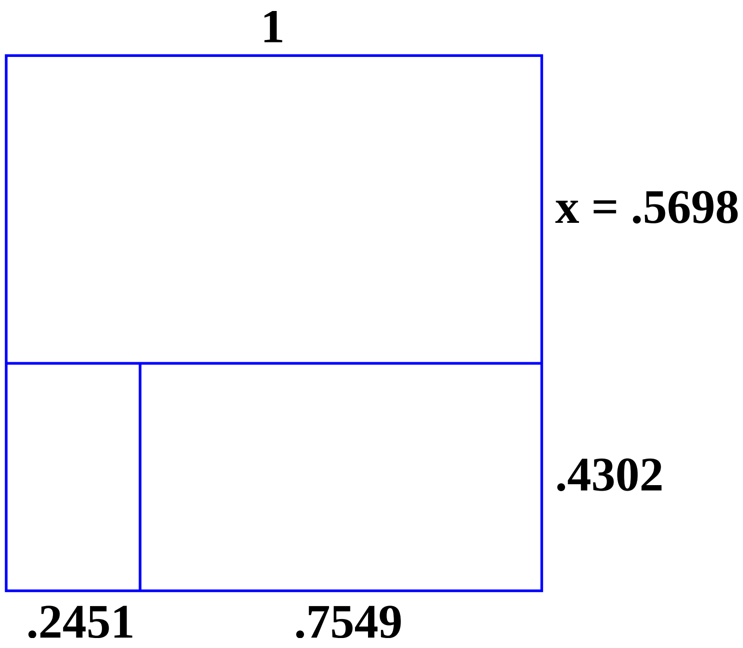
$$x(1-x) = \frac{1}{5}$$

$$5x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$x = \frac{5+\sqrt{5}}{10} = 0.7236067977\ldots$$

La otra raíz:

$$x = \frac{5-\sqrt{5}}{10} = 0.2763932023\ldots$$



$$x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = 0.5698402910\ldots$$

Las otras dos raíces:

$$x = 0.215\ldots + 1.307\ldots\sqrt{-1}$$

$$x = 0.215\ldots - 1.307\ldots\sqrt{-1}$$

Teorema. (Freiling-Rinne, Laczkovich-Szekeres, 1995)

Es posible teselar un cuadrado con rectángulos semejantes al rectángulo $1 \times x$ si y sólo si:

1. existe un polinomio (mínimo) P de coeficientes enteros tal que $P(x) = 0$, y
2. todas las raíces de P tienen parte real positiva.

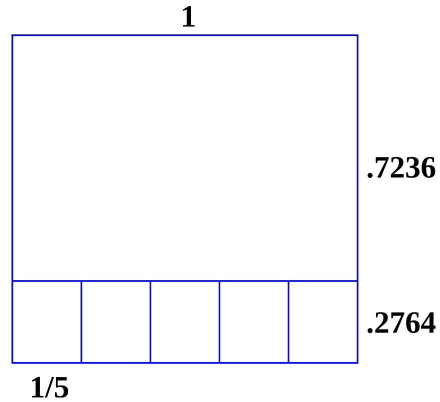
- En cualquier teselación, la suma de las áreas de las fichas es igual al área de la región.
- Hay una infinidad de nociones (analíticas, algebraicas) de "área" con la misma propiedad.

Ejemplos.

- $x = \frac{5+\sqrt{5}}{10} = 0.7236067977\ldots$

  Polinomio mínimo: $5x^2 - 5x + 1 = 0$

  Otra raíz: $\frac{5-\sqrt{5}}{10} = 0.2763932023\ldots$

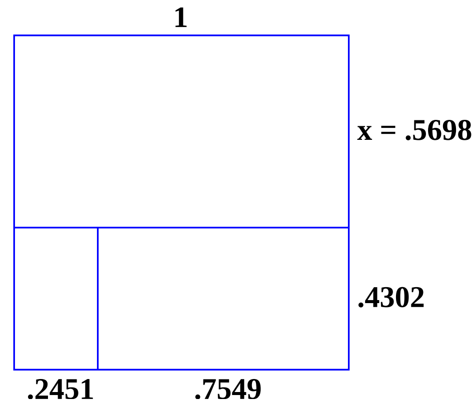


- $x = 0.5698402910\ldots$

  Polinomio mínimo: $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$

  Otras raíces: $0.215\ldots + 1.307\ldots\sqrt{-1}$,

  $0.215\ldots - 1.307\ldots\sqrt{-1}$



Ejemplos.

- $x = \sqrt{2}$.

  Polinomio mínimo: $x^2 - 2 = 0$

  Otra raíz: $-\sqrt{2} < 0$.

  No es posible con rectángulos semejantes al $1 \times \sqrt{2}$.

- $x = \sqrt[3]{2} + \frac{p}{q}$.

  Polinomio mínimo: $(x - \frac{p}{q})^3 - 2 = 0$

  Otras raíces: $\left(\frac{p}{q} - \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right) \pm \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}$.

  Es posible con rectángulos semejantes al $1 \times \left(\sqrt[3]{2} + \frac{p}{q}\right)$
  si y sólo si $\frac{p}{q} > \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

Métodos algebraicos - otros ejemplos:

- (Laczkovich, 1993) No es posible teselar un cuadrado con triángulos $30° - 60° - 90°$.

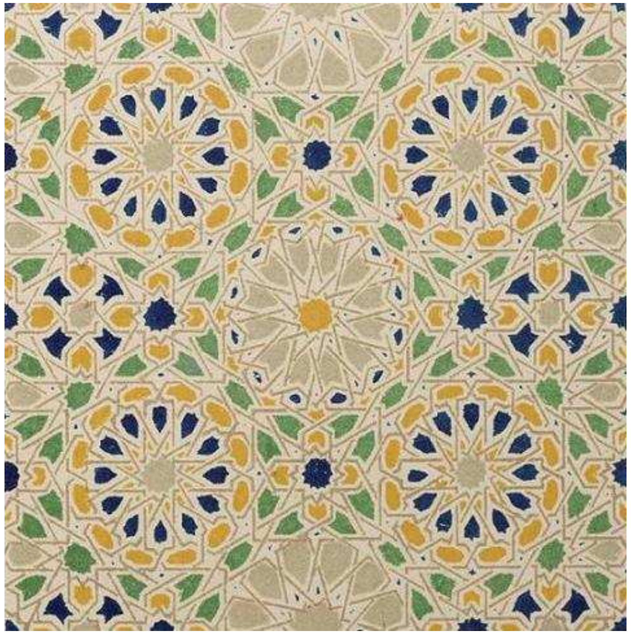
  (Otra generalización de área.)

- (Monsky, Richman, Thomas, 1970) No es posible teselar un cuadrado de área $2n + 1$ con $2n + 1$ triángulos de área 1.

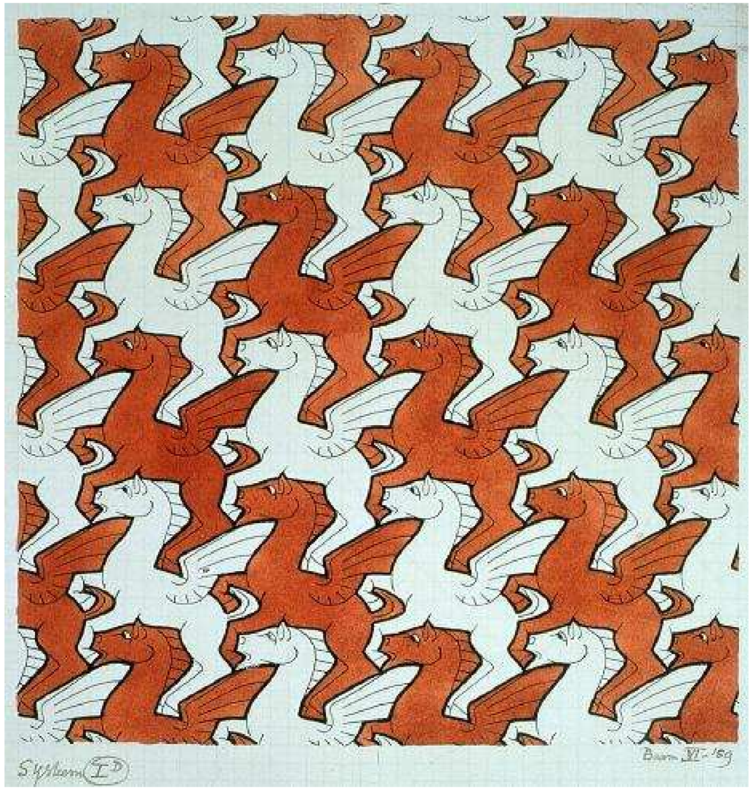
  (Valuaciones.)

6a. Teselaciones regulares.

Ninguna charla sobre teselaciones estaría completa sin los ejemplos más famosos:



(Palacio de la Alhambra - Granada, España, siglos XIII y XIV.)

(Maurits Cornelis Escher, Holanda, 1898-1972)

Además de ser teselaciones muy bonitas, motivan el problema importante de estudiar sus simetrías.

Pregunta:

¿Cuántas teselaciones regulares diferentes hay, y cuáles son?

Respuesta:

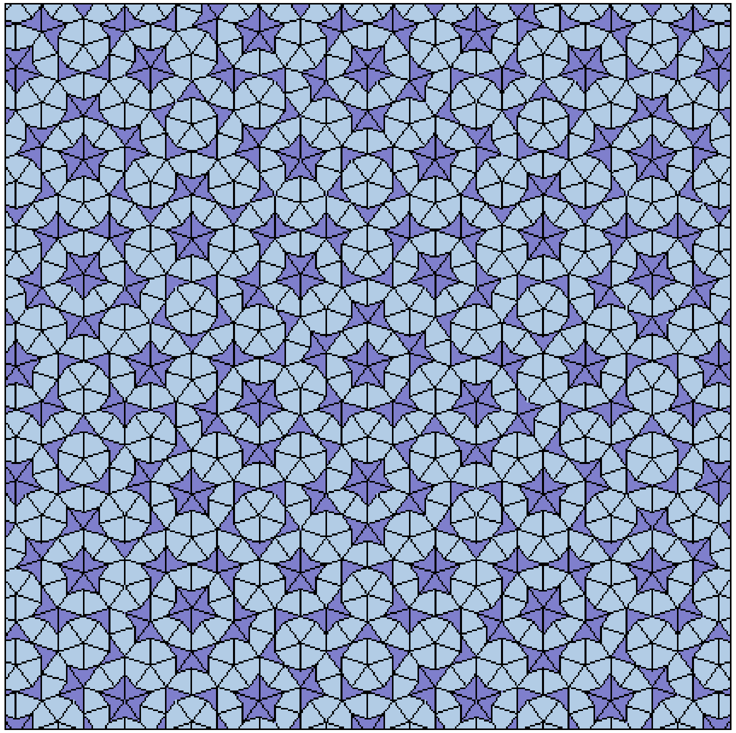
Depende de la definición de “regulares” y “diferentes”.

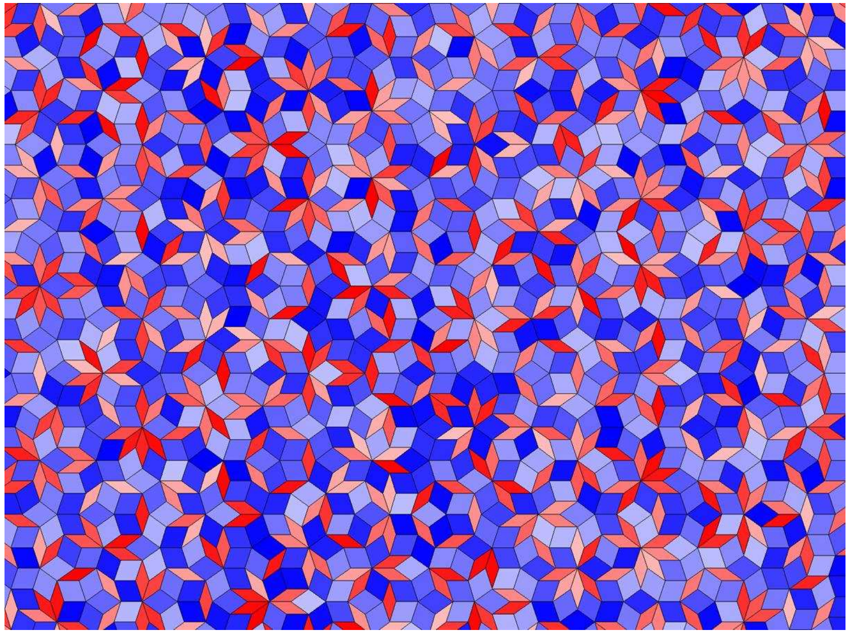
Teorema. (Fedorov, Schoenflies, Barlow, 1880s)

Hay exactamente 17 teselaciones del plano esencialmente diferentes que tienen simetrías en dos direcciones independientes.

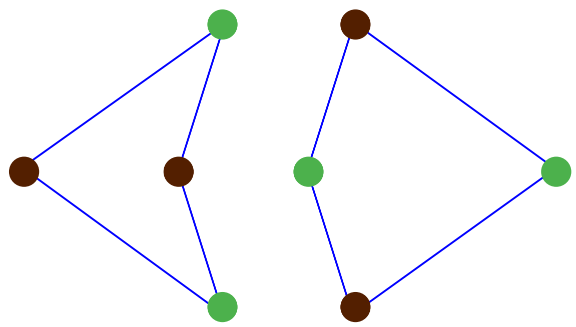
Hoy en día, estos tipos de simetría se conocen como los 17 grupos cristalográficos planos.

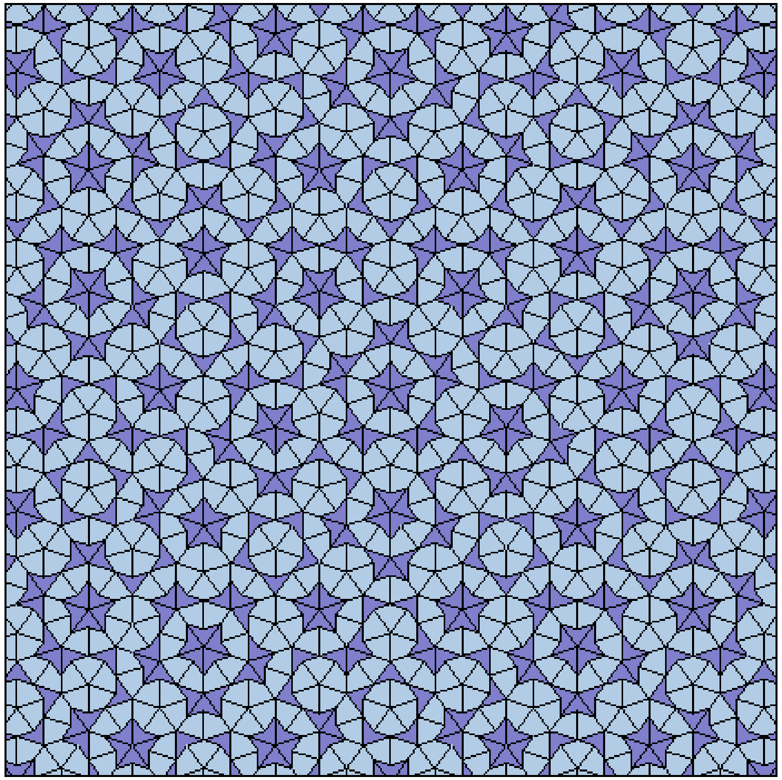
6b. Teselaciones irregulares





(Roger Penrose, Inglaterra, 1931-)





Teorema. (Conway, Penrose, '74)

- Hay un número infinito (no contable) de teselaciones "dardo-cometa" diferentes.
- Todas son irregulares.
- (# cometas) / (# dardos) es igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- Cualquier trozo finito aparece infinitas veces, y muy cerca, en cualquier teselación infinita.

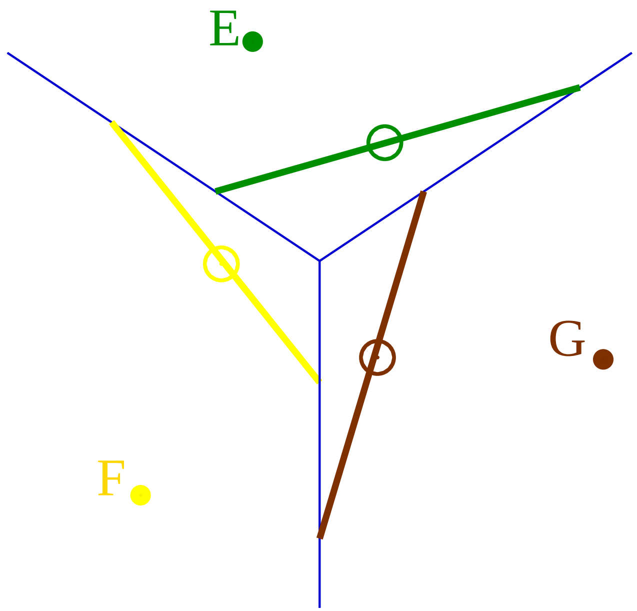
7. Teselaciones en la geometría de banderas:

Una **bandera** $E_\bullet$ en $\mathbb{R}^n$ es una cadena $E_{-1} \subset E_0 \subset \cdots \subset E_n$ de subespacios afines. $(\dim E_i = i)$

$$\emptyset \subset \text{punto} \subset \text{recta} \subset \text{plano} \subset \cdots \subset \text{hiperplano} \subset \mathbb{R}^n.$$

Objetivo: investigar las intersecciones de d banderas en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo: tres banderas en $\mathbb{R}^3$.

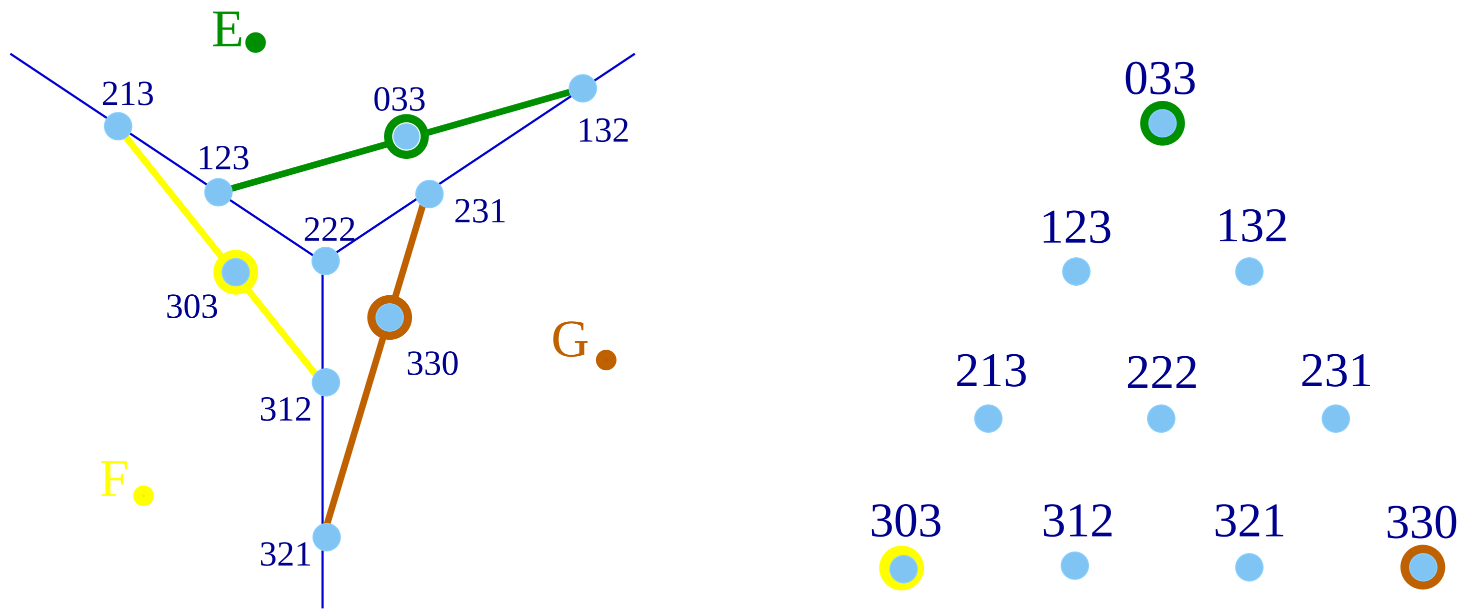


¿Cómo se intersectan d banderas en posición general en $\mathbb{R}^n$?

Para empezar: los puntos de intersección. Como

$$n - \dim(E_i \cap F_j \cap G_k) = (n-i) + (n-j) + (n-k),$$

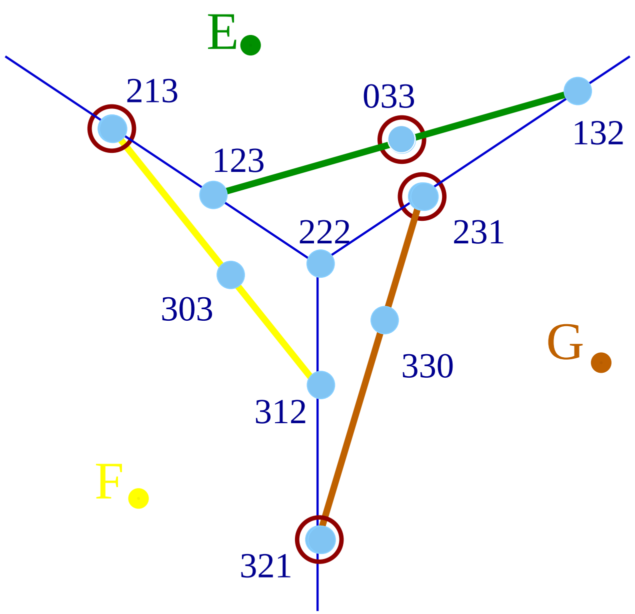
los puntos son los $E_i \cap F_j \cap G_k$ con $i + j + k = 2n$.

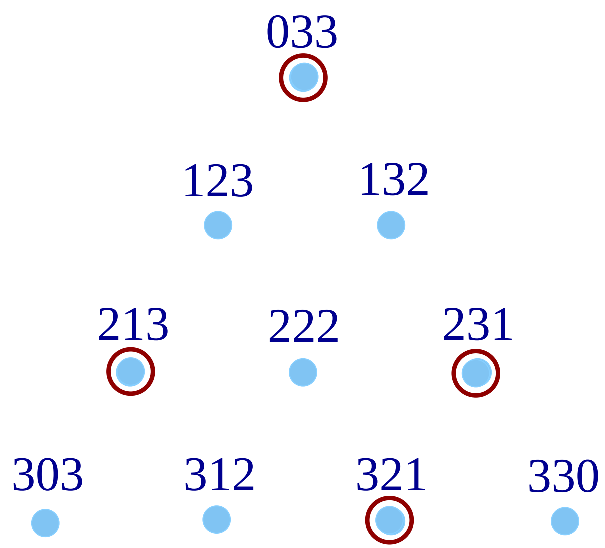


Intersectando tres banderas en $\mathbb{R}^n$, obtenemos una configuración de $n(n+1)/2$ puntos. La pregunta combinatoria:

¿Cuál es la matroide? Es decir, ¿qué relaciones hay entre ellos? ¿Cuáles son colineales, coplanares, etc.?

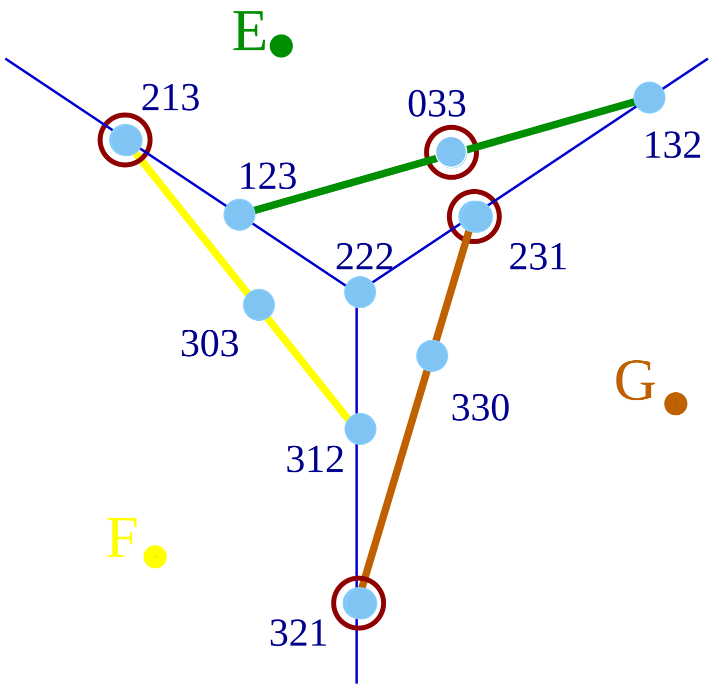
Pregunta. En esta configuración de $\binom{n+1}{2}$ puntos en $\mathbb{R}^n$, cuáles $(n+1)$-tuplas son bases (afines) de $\mathbb{R}^n$?

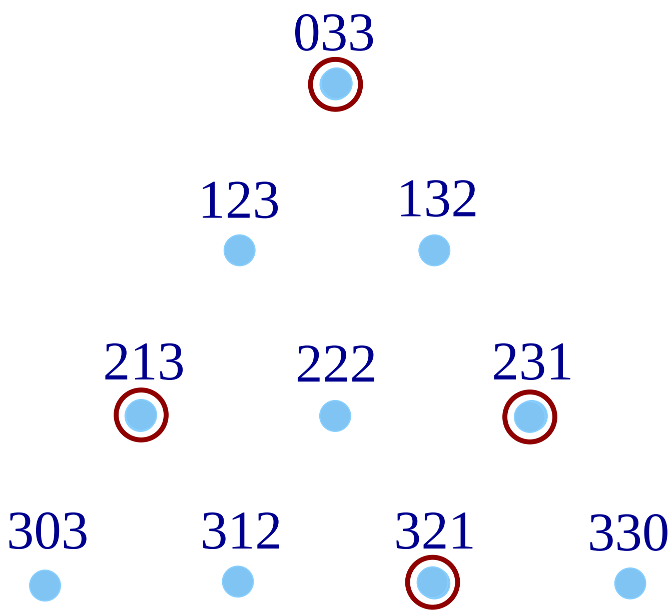




Conjetura. (Billey)

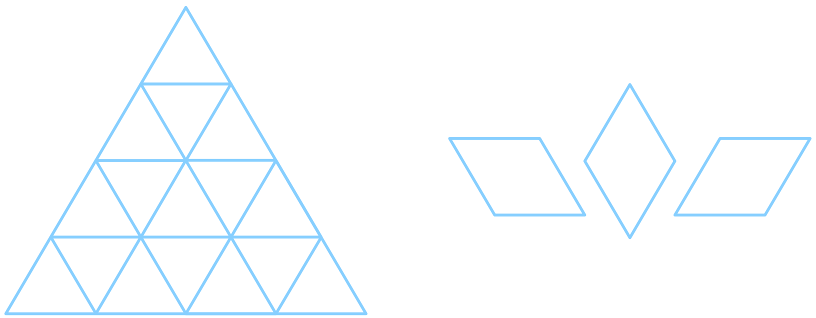
En esta configuración de $\binom{n+1}{2}$ puntos en $\mathbb{R}^n$, una $(n+1)$-tupla de puntos es una base de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si cada triángulo de lado k contiene a lo más k puntos.





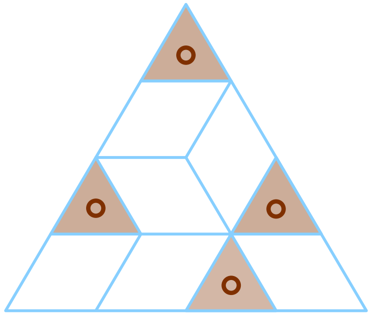
Un pequeño paréntesis.

Supongamos que quiero teselar un triángulo equilátero con rombos:



Es imposible: $\#\Delta = \binom{n+2}{2}$ $\#\nabla = \binom{n+1}{2}$

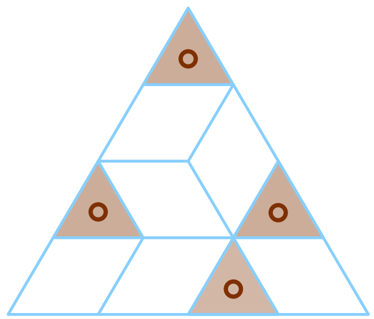
Sería posible si hago $n+1$ huecos (que miran hacia arriba):



¿Dónde puedo poner los huecos?

Teorema. (Ardila, Billey, 2005)

Un triángulo equilátero con huecos puede ser teselado con rombos si y sólo si cada triángulo de lado k contiene a lo más k huecos.



Usando teselaciones → emparejamientos → matroides:

(Conjetura.) **Teorema.** (Ardila, Billey, 2005)

En esta configuración de $\binom{n+1}{2}$ puntos en $\mathbb{R}^n$, una $(n+1)$-tupla de puntos es una base de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si cada triángulo de lado k contiene a lo más k puntos.

Muchos interrogantes:

1. Estas teselaciones son las **subdivisiones mixtas** de un triángulo. Fueron definidas en el contexto de politopos y variedades tóricas, y están relacionadas con:
   - el problema del transporte en optimización
   - el embebimiento de Segre de $\mathbb{CP}^{d-1} \times \mathbb{CP}^{n-1}$ en $\mathbb{CP}^{dn-1}$
   - la geometría tropical.

   ¿Cómo usar esto para estudiar la geometría de banderas?
2. El caso de d banderas corresponde a las subdivisiones mixtas de un símplice d-dimensional. La conjetura en este caso sigue abierta. ¿Cómo generalizar estos resultados?
3. **¿Cómo aplicar estas técnicas al cálculo de Schubert?**

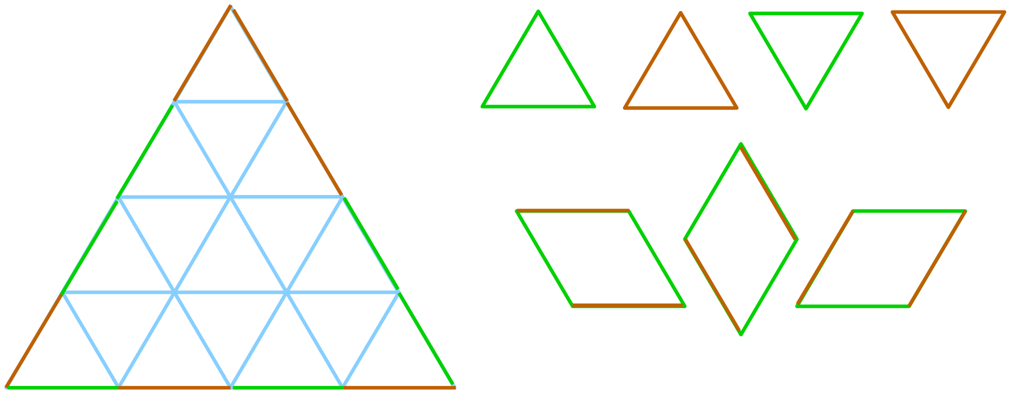
El **cálculo de Schubert** es una rama de la geometría algebraica enumerativa, que contesta preguntas como esta:

¿Cuántas rectas intersectan a cuatro rectas dadas en $\mathbb{C}^3$?

Problema 15 de Hilbert: Formalizar el cálculo de Schubert.

Solución: Calcular en el anillo de cohomología de la variedad Grassmanniana $\mathrm{Gr}(k, n)$, que parametriza k-planos en $\mathbb{C}^n$.

¡Esto se puede hacer armando rompecabezas! (Knutson-Tao '02)



Abierto: "Rompecabezas" en el cálculo de Schubert de banderas.

Muchas gracias por su atención.

Esta charla fue basada en dos artículos:

- Un artículo divulgativo, **Tilings**, escrito con Richard Stanley en 2004-5. Está en:

  `www.math.washington.edu/ ~federico`

  `http://front.math.ucdavis.edu/math.CO/0501170`

  También está la versión en alemán, **Pflasterungen**, traducida por Günter Ziegler. Esperamos tener una versión en español pronto.

- Un artículo con Sara Billey, que estará disponible ahí en un par de meses.