UNIDAD III. Funciones Trigonométricas.

El estudiante: Resolverá problemas de funciones trigonométricas teóricos o prácticos de distintos ámbitos, mediante la aplicación y el análisis crítico y reflexivo de sus propiedades, que permita la resolución de triángulos rectángulos, en un ambiente escolar que favorezca el desarrollo de actitudes de responsabilidad, cooperación, iniciativa y colaboración hacia el entorno en el que se desenvuelve.

3.1 Funciones trigonométricas para ángulos agudos.

3.1.1 Conversión de ángulos en grados a radianes y viceversa.
3.1.2 Funciones recíprocas.
3.1.3 Cálculo de valores 30°, 45° y 60°.
3.1.4 Resolución de triángulos rectángulos.

3.2 Funciones trigonométricas para ángulos de cualquier magnitud.

3.2.1. En un plano coordenado.
- Ángulo de referencia
- Signo y valores de las funciones trigonométricas
- Gráficas de las funciones seno, coseno y tangente

3.2.2. En el círculo unitario.
- Funciones de un segmento.
- Identidades Pitagóricas.

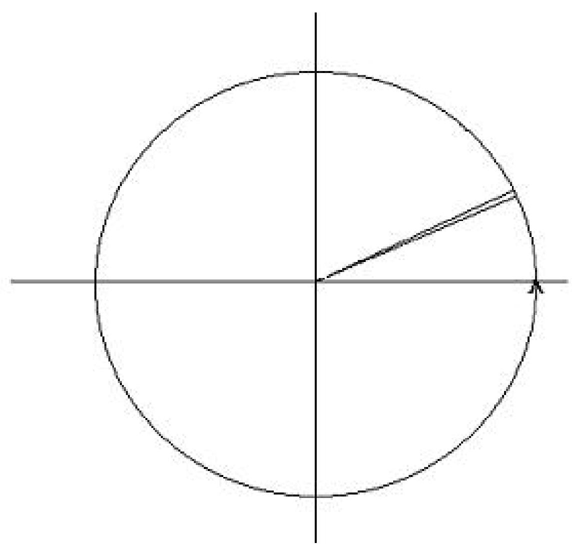
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS AGUDOS.

Recordarás que cuando mides la distancia que hay entre dos puntos, dirás que ésta es de 5cm, 2m o 24ft. Recordarás que esto depende del patrón de medida que utilices. Lo mismo pasa si haces una medición de la temperatura ambiental que podrías expresar en grados Centígrados o grados Fahrenheit. De manera similar, la abertura de un ángulo, la magnitud de aun ángulo, puede medirse en Grados o en Radianes. Así como puedes recordar que hay una relación entre los grados Centígrados y Fahrenheit, que nos permite establecer la equivalencia entre las medidas expresadas por estas, así, de manera semejante se establece una relación entre los Grados y Radianes para expresar la medida de un ángulo.

EL GRADO. Definamos primero lo que es la unidad de medida de un grado.

Medición de ángulos en el sistema sexagesimal. Cuando un ángulo es trazado con una "vuelta completa" estaremos hablando de un ángulo de 360°; observa como se describe una circunferencia.

Se define, como un grado, aquella parte que resulte de dividir a la circunferencia en 360 partes iguales; es decir cada una de estas partes mide un grado. Si, una de estas partes es divididita en 60 partes iguales, a cada una de estas se le dirá "un minuto". Por si fuera poco, si cada una de estas partes, un minuto, fueran divididas en 60 partes iguales, a estas pequeñas partes se les llama "segundos".



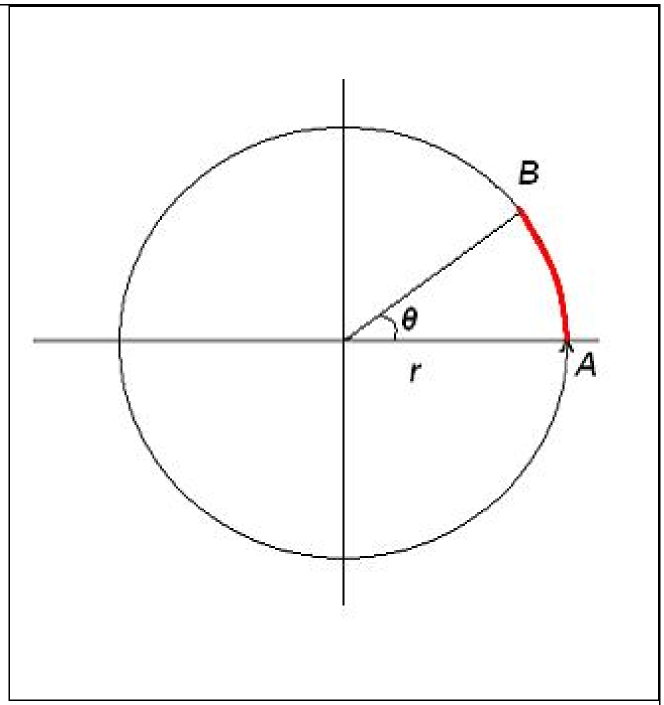
NOTA. Piensa en una rueda de bicicleta tuviera 360 rayos igualmente espaciados; el espacio que guardarían entre un par consecutivo de ellos sería de un grado.

EL RADIAN. Ahora debemos tener mucho cuidado en como definimos la unidad de medida “radian”. De manera similar, pensemos en una circunferencia, de radio r, centrada en el origen de un sistema cartesiano. Para esto sigue por favor la figura que se te muestra enseguida:

Pensemos que el arco $\widehat{AB}$, tiene la misma longitud que el radio r de la circunferencia. Pues bien, definimos como un radian al ángulo central que se forma con un arco de longitud igual al radio de una circunferencia. En la figura, θ = a un radian.

Recuerda que la circunferencia cubre 360° y, tenemos que, la cantidad de arcos, de un radian, que se pueden formar en una circunferencia es igual a 2π.

π es un numero irracional y sus primeros 4 decimales que tomaremos son 3.1416, que es la cifra con la que le reconoceremos.



EQUVALENCIA entre el Grado y el Radian. Bien, en las dos ocasiones, para definir a ambos, nos referimos a una circunferencia y e concluimos que el ángulo que cubre un radio al girar a su alrededor es de 360° y también de 2π radianes. Proponemos la siguiente relación de equivalencia:

$360^{\circ} = 2\pi\_radianes$

Ejemplo. Utilizando la relación de equivalencia anterior y aplicando la regla de tres, determina la equivalencia de: 90° a π/2 radianes.

360°	2π radianes
90°	X

En dónde la incógnita es igual a: $x = \frac{(90°)(2\pi\_radianes)}{360°} = \frac{(2\pi\_radianes)}{4} = \frac{\pi\_rad}{2}$

Es decir que: $x = \frac{\pi}{2} radianes$ es decir $90° = \frac{\pi}{2} radianes$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS. Las distintas relaciones, o cocientes, que se pueden dar entre los lados de un triángulo rectángulo so 6. Estas relaciones, tienen ya un nombre dentro de la trigonometría. Veamos la siguiente figura, en donde definimos estas 6 funciones trigonométricas.

Tomando como referencia el ángulo θ, tenemos los cocientes:

$$\frac{cat.opuesto}{hipotenusa} = sen(\theta)$$

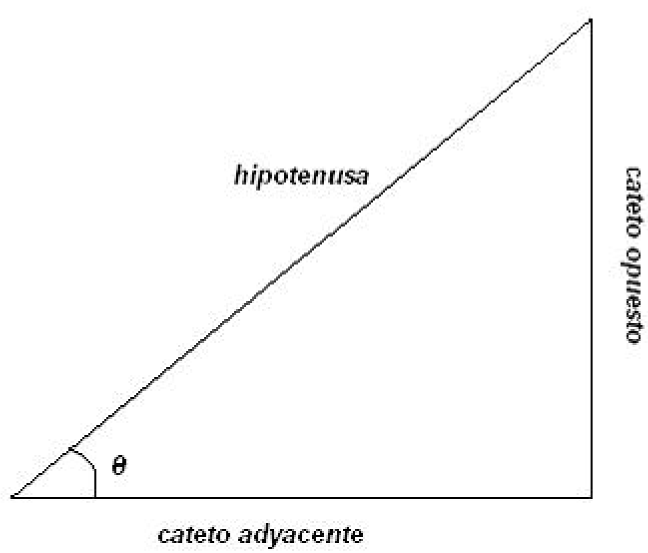
$$\frac{cat.adyacente}{hipotenusa} = \cos(\theta)$$

$$\frac{cat.opuestp}{cat.adyacente} = \tan(\theta)$$

$$\frac{cat.adyacente}{cat.opuesto} = \cot(\theta)$$

$$\frac{hipotenusa}{cat.adyacente} = \sec(\theta)$$

$$\frac{hipotenusa}{cat.opuesto} = \csc(\theta)$$



NOTA. El nombre de estas funciones, en el orden que aparecen, de arriba hacia abajo, son: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

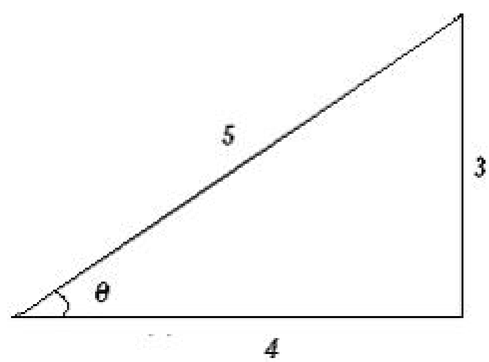
FUNCIONES RECÍPROCAS. Las tres últimas funciones de la tabla anterior, la cotangente, secante y cosecante, son llamadas funciones inversas. La razón es que estas funciones son inversas a las tres primeras y de manera consecutiva; es decir:

$\csc(\theta) = \frac{1}{sen(\theta)}$ puesto que $sen(\theta) = \frac{cat.opuesto}{hipotenusa}$ y $\csc(\theta) = \frac{1}{\frac{c.o.}{hip}}$ y aplicando la ley de la herradura tenemos que : $\csc(\theta) = \frac{hip}{cat.opu}$ como fue definida.

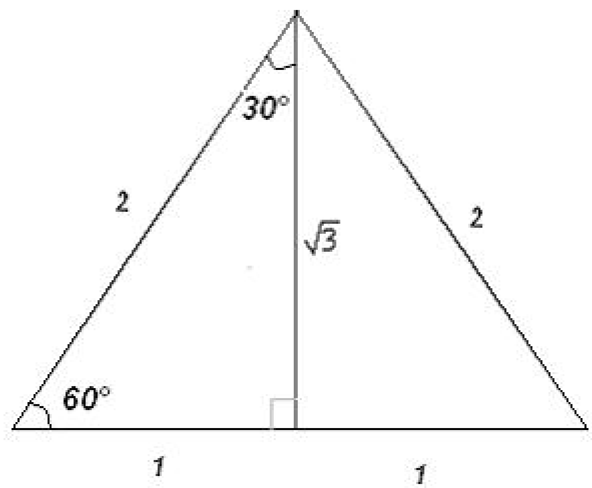
De manera similar tenemos que:

$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$ y también $\cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$

EJEMPLO. Determina el valor de las funciones trigonométricas, aplicadas al ángulo θ, para el triángulo de la figura.

$sen(\theta) = \frac{3}{5} = 0.6$	
$\cos(\theta) = \frac{4}{5} = 0.8$	
$\tan(\theta) = \frac{3}{4} = 0.75$	
$\cot(\theta) = \frac{4}{3} = 1.33$	
$\sec(\theta) = \frac{5}{4} = 1.25$	
$\csc(\theta) = \frac{5}{3} = 1.66$	

CÁLCULO DE VALORES 30°, 45° Y 60°. Existen ángulos como 30°, 60° y 45°, para los cuales es muy importante saber el valor de estas funciones. En apoyo a esto, y como un método para reconocer el valor de las funciones para estos ángulos, presentamos la forma de cómo calcularlos. Partamos de un triángulo equilátero, cuyos lados son de 2 unidades, y cuyos ángulos son de 60°.

Mas adelante sabrás porque afirmamos que la altura de este triángulo es $\sqrt{3}$. Refirámonos al triángulo de la izquierda, el cual es real la relación de la dimensión de sus lados y sus ángulos. Aplicando la definición de las funciones, veamos que: $sen(30°) = \frac{1}{2} = 0.5$ $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$ $\tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5773$ **NOTA.** Te invitamos a realizar el mismo ejercicio pero para el ángulo de 60°	

RETO. Te invitamos ha investigar el cálculo de las funciones para cuando el ángulo es de 45°. Para esto, puedes partir de un cuadrado cuyos lados midan 1unidad. Cuando trazas una diagonal divides a este cuadrado en dos triángulos rectángulos. Toma uno de ellos y verás que sus catetos valen 1 unidad y la hipotenusa (la diagonal) mide raíz de 2 (es decir $\sqrt{2}$). Los ángulos de este triángulo son de 45°, dos de ellos, y el ángulo de 90°.

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS. Este concepto se aplica a triángulos rectángulos, en esta ocasión, utilizando las funciones trigonométricas vistas. El método se refiere al uso de estas funciones para el cálculo del valor de los lados y de los ángulos en un triángulo, "con el objetivo de conocer el valor de todos sus lados y todos sus ángulos". Verás que el uso del método tiene algunas restricciones:

Podrá aplicarse el método si conoces como mínimo:

- Dos lados.
- Un lado y un ángulo

IMPORTANTE. Conocer como mínimo dos ángulos no es suficiente para poder identificar las otras magnitudes, las de los lados. Conocer dos ángulos no es suficiente. La razón descansa en el hecho de que se pueden tener triángulos semejantes, con todos sus ángulos iguales y con todos sus lados distintos. Piensa en dos triángulos a escala.

EJERCICIO. En la figura se tiene un triángulo rectángulo. De éste únicamente conocemos que sus lados miden 8 y 5 centímetros. Resuelve este triángulo encontrando el valor de su tercer lado y el de sus dos ángulos desconocidos.

Para conocer el ángulo θ, puesto que conocemos únicamente a y b, podemos aplicar la función Tangente:

$\tan(\theta) = \frac{6}{8} = 0.75$ y así $\tan(\theta) = 0.75$ y aplicando las funciones inversas, podemos conocer el ángulo θ:

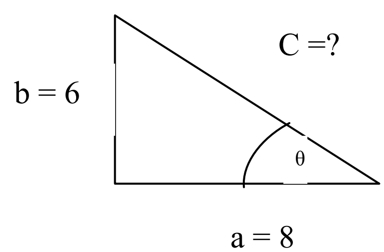
$\theta = \tan^{-1}(0.75)$ y con tu calculadora puedes ver que $\theta = 36.86^\circ$

2. Conocido este ángulo, podemos ir en búsqueda del tercer lado, la hipotenusa, aplicando la función seno o la función coseno; esto sería indistintamente ya que las dos funciones involucran a la hipotenusa.

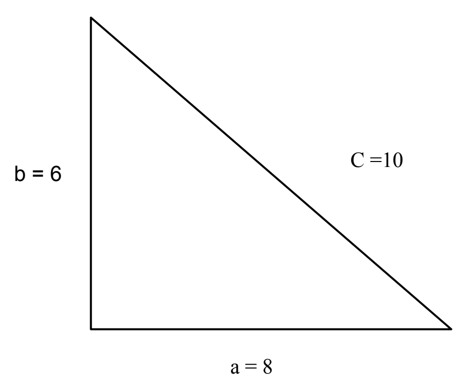
Apliquemos la función seno: $sen(36.86°) = \frac{6}{C}$ y despejando $c = \frac{6}{sen(36.86°)} = \frac{6}{0.6} = 10$ por lo tanto: $c = 10$

3. Para conocer el tercer ángulo, que llamaremos β, acudimos a la propiedad de los triángulos que dice que "la suma de todos los ángulos es de 180°":

$\theta + \beta + 90° = 180°$ así tenemos $\beta = 180° - 90° - 36.86°$ y por tanto: $\beta = 53.14°$



Triángulo resuelto:



ÁNGULOS EN EL PLANO COORDENADO. El concepto de ángulo se puede llevar al plano coordenado y mediante este se tiene la referencia de los ejes coordenados. Aquí, siempre se consideran los ángulos medidos partiendo del eje X y trazándolos en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

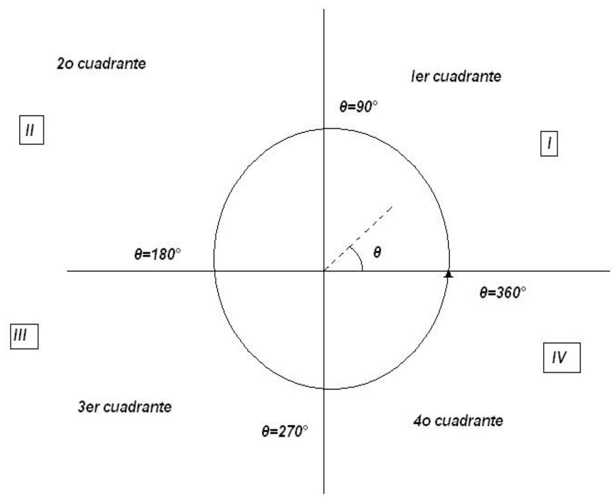
Recordarás el concepto del “plano coordenado” o “plano cartesiano”, el cual es un plano dividido en cuatro partes por dos ejes coordenados X, Y. Estas cuatro partes son llamadas cuadrantes; cuadrantes I, II, III y IV.

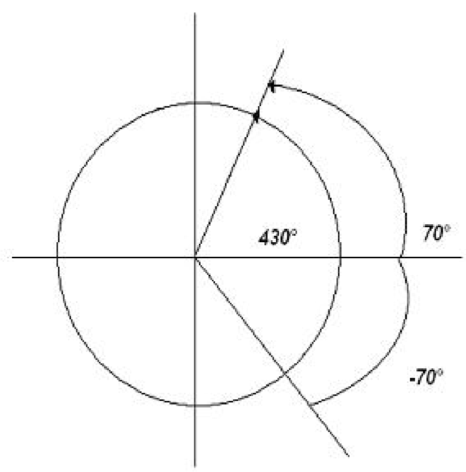
Un ángulo cualquiera, en el plano coordenado, se mide partiendo del eje X y extendiéndose en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Un ángulo de 57°, por ejemplo, comienza en el eje x y termina en el 1er cuadrante, cuadrante I.

Un ángulo de 120° termina en el 2º cuadrante, es decir, en el cuadrante II.

Un ángulo de 430° , puesto que es mayor de 360°, con 430°-360°, es decir 70°, entonces termina en el cuadrante I y aquí termina en donde terminaría un ángulo de 70°.
Un ángulo negativo, o por ejemplo de -70°, es aquel que parte del eje X y que se traza en el sentido de las manecillas del reloj. Comparándolo con el +70°, en lugar de este, sería trazado hacia el IV cuadrante.





EL CÍRCULO UNITARIO. Si pensamos en un círculo trazado en un sistema coordenado en donde, su centro, coincide con el origen del sistema coordenado. A partir de esta figura. El tratado anterior sobre ángulos en el plano coordenado se puede extender utilizando el círculo de radio unitario, de radio igual a 1.

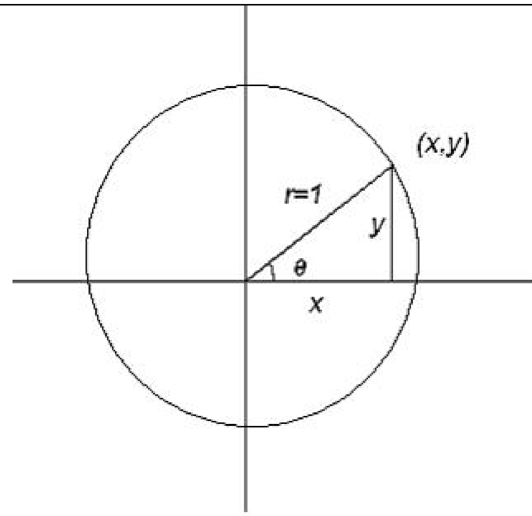
Para esto pensemos en que un ángulo θ cualquiera, lo trazamos haciendo girar el radio del círculo desde el eje X, en el sentido contrario a las manecillas del reloj, justamente esos θ°. El radio estará trazado a un punto, de la circunferencia, con coordenadas (x,y). De esta manera, tomando este radio como hipotenusa, tenemos definido un triángulo rectángulo con base X y altura Y.
Aplicando las funciones trigonométricas a este triángulo, tenemos que:

$sen(\theta) = \frac{y}{r=1} = \frac{y}{1} = y$ es decir que el valor que se le atribuye al sen(θ) siempre equivaldrá al valor de la ordenada del punto, es decir:

$sen(\theta) = y$ ec.*

Observemos que:
1. el mínimo valor de la ordenada y, en el 1er cuadrante, es cero.
2. el máximo valor en el mismo 1er cuadrante es de uno.

Por tanto concluimos que, puesto que el valor de y representa el seno, el valor de esta función, para ángulos entre 0° y 90°, está entre 0 y 1.
En la figura puedes ver lo que sucede con las funciones coseno y tangente.



$\cos(\theta) = \frac{x}{1}$

$\cos(\theta) = x$ ec. **

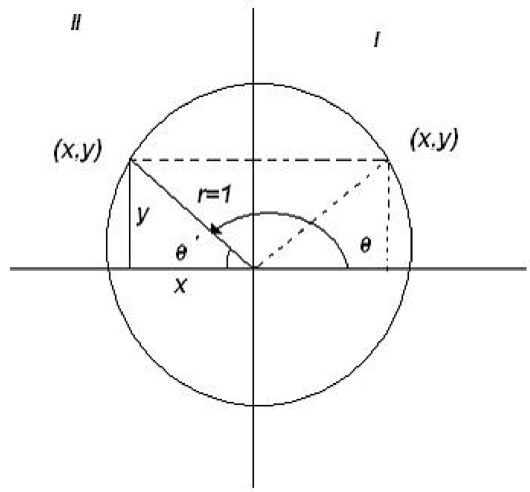
A semejanza de la función seno, extraemos que los valores del coseno en el 1er cuadrante, entre 0° y 90°, está entre 1 y 0.

$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ y considerando las ecuaciones que definen seno y coseno:

$\tan(\theta) = \frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)}$

RETO. Considerando los límites de valores que, las funciones seno y coseno, toman en el primer cuadrante, de 0° a 90°, te invitamos a que, utilizando esta última fórmula que define la función tangente, te invitamos a que determines qué valores toma la función tangente en estos límites del primer cuadrante.

CÁLCULO DE ÁNGULOS MAYORES DE 90°, EJEMPLO 2º CUADRANTE. El procedimiento es similar al caso anterior del 1er cuadrante. En un círculo unitario se traza el ángulo mayor de 90° y menor de 180°. Ver la siguiente figura.

Para que compares el procedimiento con el caso anterior, dejamos en este figura el triángulo anterior (el punteado). El ángulo mayor de 90° define un punto de coordenadas (x,y) en el 2º cuadrante, que es simétrico al caso del 1er cuadrante. El triángulo que queda en el cuadrante II es congruente con el del 1er cuadrante, así es que $\theta = \theta$'. Así es que este triángulo servirá de apoyo para el cálculo de las funciones trigonométricas en el 2º cuadrante. Los valore de las funciones, observa la simetría, son iguales a los del 1er cuadrante; solo se presenta diferencias con la abscisa (x), la cual está considerada negativa. Por tanto tenemos que: **Sen(θ') toma valores entre 0 y -1.** **Cos(θ') los toma entre 1 y 0.** **tan(θ') entre 0 y -∞.**	

NOTA. Te invitamos que hagas un análisis de lo presentado en la idea anterior y que reproduzcas el método para que análisis lo que pasa en los cuadrantes II y IV.

GRAFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.

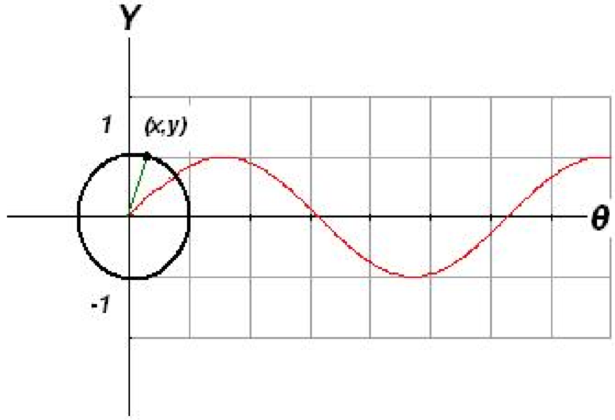
Recordarás el tema anterior de las funciones en el círculo unitario, el que presentamos en la figura se a lado. En este hacemos girar el radio (en verde) desde el eje X y en sentido contrario a las manecillas del reloj. En ello obtuvimos la expresión $sen(\theta) = y$ en donde representamos el vaor del sen(θ) como el valor de Y, es decir la altura que tome el radio al estar girando. Si el eje horizontal lo tomamos como el ángulo que el radio haya girado, θ. La curva roja que representa la función Seno se traza como "la altura del radio en función del ángulo que gira".
En la segunda figura podrás ver con mas detalle la construcción.
Mostramos tambien una tabla de valores que corresponden al valor de la función:

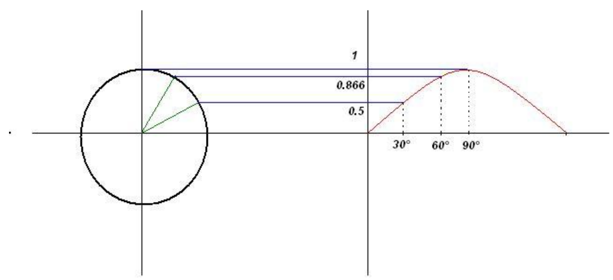
30°	Sen(30°)	Y = 0.5
60°	Sen(60°)	Y= 0.866
90°	Sen(90°)	Y = 1

La construcción de la curva, en el tramo de 90° a 180°, se da cuando el radio gira en el segundo cuadrante en donde se repiten los valores de Y. Para el tercer y cuarto cuadrante, habrá valores negativos de Y y entonces estaremos construyendo el tramo de los 180° a los 360°, completandose de esta manera un ciclo que son 360°. **Le llaman una onda completa.**

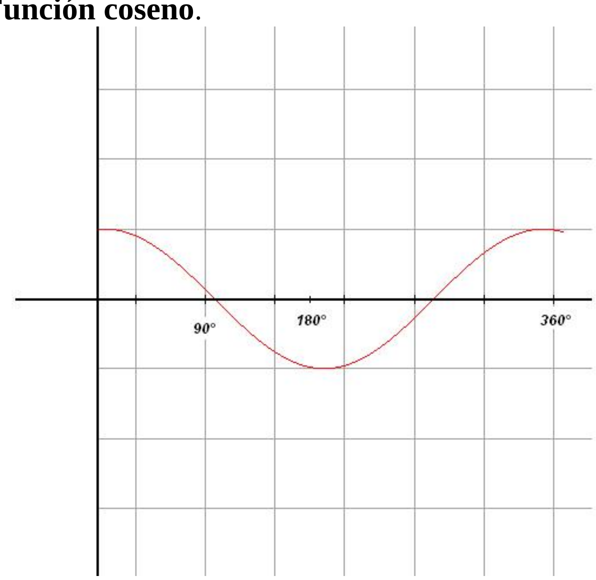
La función coseno se construye de manera similar. Puedes ver en la figura correspondiente. Has un análisis del porque es así su grafica.

Función seno.

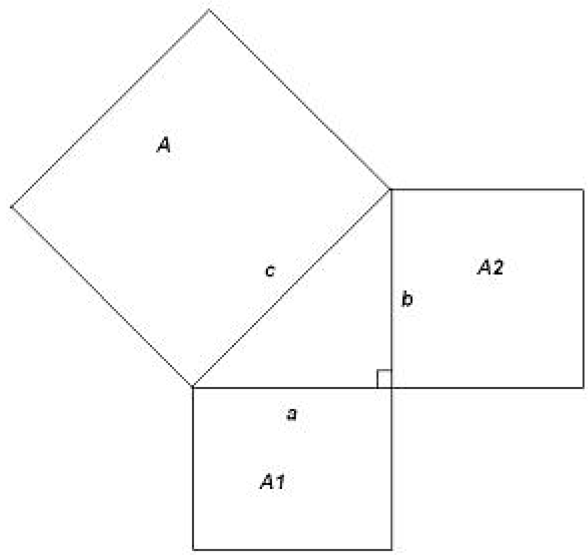




Función coseno.



TEOREMA DE PITÁGORAS. Este teorema arroja una fórmula que te será muy útil en el manejo de muchas de las ideas de las matemáticas. El particular la estaremos presentando en el ambiente de la resolución de triángulos rectángulos.

<table>
<tr>
<td>Recuerda que el área de un cuadrado de lado l se calcula como A = (l)(l). Considerando esto y observando el triángulo rectángulo cuyos lados son a, b y de hipotenusa c, tenemos que si trazamos cuadrados sobre los tres lados de estos triángulos, el área de cada uno de estos cuadrados es.
$A = c^2$
$A_1 = a^2$
$A_2 = b^2$
El teorema de Pitágoras dice que el área de estos cuadrados se relaciona de la forma
$A = A_1 + A_2$; es decir, la suma del área de los cuadraos formados sobre los catetos es igual a el área del cuadro formado sobre la hipotenusa. Está situación relacionada la magnitud de los tres lados del triángulo con la siguiente fórmula:
TEOREMA DE PITAGORAS
$c^2 = a^2 + b^2$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

APLICACIÓN DEL TEOREMA PARA RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS. Considerando un triángulo en donde conoces dos de sus lados, aplicando el teorema podrás conocer su tercer lado. Como ejemplo considera un triángulo anterior en donde a = 8 y b = 6. Tenemos que, aplicando el teorema, $c^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$ es decir que $c^2 = 100$ y por tanto, con propiedades de los exponentes tenemos: $c = \sqrt{100}$ y entonces el lado buscado es $c = 10$.

IDENTIDADES PITAGORICAS. Utilizando los resultados anteriores, sobre funciones trigonométricas en el círculo unitario y el mismo teorema de Pitágoras, extraemos las siguientes fórmulas.

Recuerda que en este círculo vimos que

$y = sen(\theta)$

$x = \cos(\theta)$

Ahora, si aplicamos el teorema a este triangulo tenemos que se cumple la siguiente igualdad:

$1 = x^2 + y^2$ y considerando las igualdades anteriores tenemos que:

$1 = sen^{2}(\theta) + \cos^{2}(\theta)$

Lo anterior, escrito de otra manera, es:

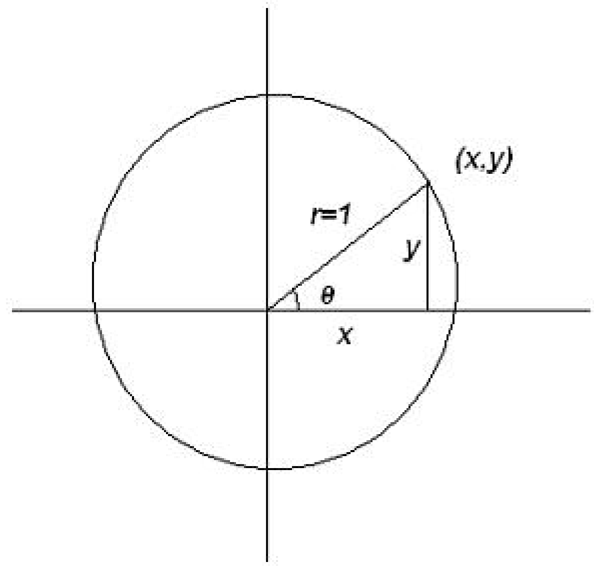
IDENTIDAD PITAGORICA

$1 = (sen\theta)^2 + (\cos\theta)^2$

RETO. Demuestra que las siguientes son identidad pitagóricas válidas:

$\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$

$1 + \cot^2(\theta) = \csc^2(\theta)$



EJERCICIOS DE LA UNIDAD III.

1) Hacer las conversiones siguientes según corresponda:

GRADOS A RADIANES	RADIANES A GRADOS
30° =	π rad =
75° =	2π/3 =
150° =	2.5 rad =
300° =	6.5 rad
245° =	5π rad=

2) Basándote en el triangulo de la figura siguiente determina el valor de las funciones trigonométricas, incluyendo las inversas, aplicadas al ángulo θ ilustrado.

$sen(\theta) = \frac{6}{7.5} = 0.8$

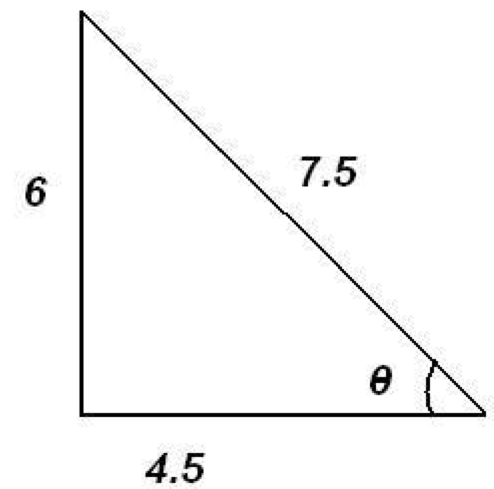
cos(θ) =

tan(θ) =

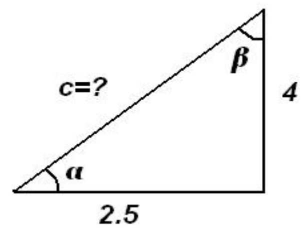
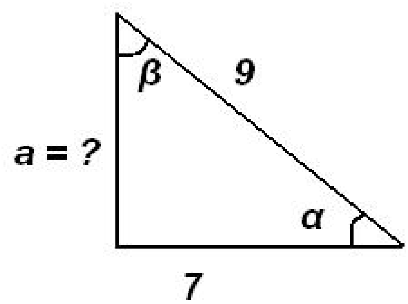
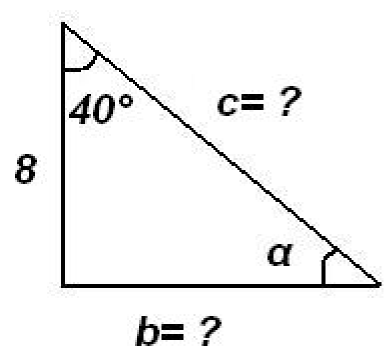
cot(θ) =

sec(θ) =

csc(θ) =



3) Para el siguiente bloque de ejercicios resuelve cada uno de los triángulos que se presentan en las figuras determinando los elementos desconocidos en cada uno de los casos.

c =¿ α = ¿ β = ¿	
α = ¿ β = ¿ a = ¿	
α = ¿ b =? c = ¿	

4) Utilizando el círculo unitario en el plano coordenado, determina el valor de las funciones trigonométricas. Considera el signo que puedan tomar las coordenadas (x,y) definidas en cada cuadrante. Apoyate, en cada caso, trazando un gráfico en el plano coordenado del triángulo equivalente.
   a) 75°
   b) 135°
   c) 240°
   d) 300°

5) Utilizando los valores de las funciones trigonométricas de los dos primeros incisos, a) y b), demostrar que se cumple la identidad pitagórica $1 = sen^2(\theta) + \cos^2(\theta)$.

6) Demuestra que la identidad pitagórica siguiente se satisface:
   $\tan^2(75°) + 1 = \sec^2(75°)$

7) Para que continúes preparándote en aplicación de problemas se recomienda que visites la siguiente página Web:

http://cuhwww.upr.clu.edu/~basa/taller5/taller5.html