PROBABILIDAD Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

FENÓMENOS ALEATORIOS Y DETERMINISTAS

Un experimento o fenómeno es *determinista* si se obtiene el mismo resultado cuando se repite el experimento en las mismas condiciones.

Un experimento o fenómeno es *aleatorio (o estocástico)* cuando al repetir el experimento en igualdad de condiciones los resultados varían, a pesar de mantener constantes las condiciones con las que se realiza el experimento.

CARACTERÍSTICAS DE UN EXPERIMETNO ALEATORIO

El experimento puede repetirse indefinidamente bajo idénticas o parecidas condiciones.

Cualquier modificación en las condiciones iníciales de la repetición modifica completamente el resultado final del experimento.

Se pueden conocer a priori el conjunto de los posibles resultados del experimento, pero no se puede predecir un resultado particular.

Si el experimento se repite un gran número de veces, la proporción con que cada resultado aparece tiende a estabilizarse.

ESPACIO MUESTRAL: Conjunto de todos los resultados que se pueden obtener al realizar un experimento aleatorio y se representa por *S* o *E*.
Ejemplo: El espacio muestral del experimento “Lanzar una moneda al aire” es *S*: {C, X} y el de “Lanzar dos monedas” *S*={CC, CX, XC, XX}

SUCESO ALEATORIO: Cada subconjunto del espacio muestral.

SUCESO ELEMENTAL O SIMPLE: Cada uno de los posibles resultados de realizar el experimento.

SUCESO COMPUESTO: Suceso aleatorio con más de un elemento.

SUCESO SEGURO: Suceso que siempre se verifica (ocurre o se presenta), es decir, es el espacio muestral.

SUCESO IMPOSIBLE: Suceso que nunca se verifica, se representa por el conjunto vacío(Ø)

SUCESO CONTRARIO de uno dado A, es el que ocurre cuando no sucede A.

Cuando dos sucesos A y B tienen algún suceso elemental común, se llaman COMPATIBLES.
Si no lo tienen se llaman INCOMPATIBLES
En el experimento de lanzar un dado, si A = { 1,2} el suceso contrario de A, será { 3,4,5,6}

OPERACIONES CON SUCESOS

UNION : Dados dos sucesos A y B del espacio muestral E, se llama suceso UNION y se escribe AUB al suceso formado por todos los sucesos elementales de A o de B

INTERSECCIÓN Dados dos sucesos A y B del espacio muestral E, se llama suceso INTERSECCIÓN y se escribe A Ω B al suceso formado por todos los sucesos elementales de A y de B

DIFERENCIA Dados dos sucesos A y B del espacio muestral E, se llama suceso DIFERENCIA y se escribe A - B al suceso formado por todos los sucesos elementales de A que no son de B

FRECUENCIA DE UN SUCESO EN UN EXPERIMETNO ALEATORIO

Dado un experimento aleatorio E que se repite n veces, se llama frecuencia absoluta de un suceso A al número de veces que se verifica el suceso A, representándose por $\mathbf{n_A}$

Se llama frecuencia relativa de un suceso A al número de veces que se verifica el suceso A, dividido por el número de veces que se repite el experimento aleatorio. Se representa por

$$f_r(A) = \frac{n_A}{n}$$

La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número, a medida que el número de pruebas del experimento crece indefinidamente. Este número se llamará *probabilidad del suceso A*:

$$p(A) = \lim_{n\to\infty} f_r(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

DEFINICIONES DE PROBABILIDAD

La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número, a medida que el número de pruebas del experimento crece indefinidamente. Este número se llamará *probabilidad del suceso A*:

Probabilidad de un suceso: Número al que tiende la frecuencia relativa al repetir un experimento en las mismas condiciones.

LA PROBABILIDAD SIEMPRE CUMPLE QUE:

La probabilidad de cualquier suceso es siempre un número entre cero y uno:

La probabilidad de todo el espacio muestral es uno: P(S)=1.

Si A y B son sucesos incompatibles, la probabilidad de que ocurra A o B es la suma de las probabilidades de que ocurra cada uno: P(A o B) = P(A) + P(B).

Definición (clásica) de probabilidad de Laplace (1749-1827): Si en un experimento aleatorio todos los sucesos elementales son equiprobables, la probabilidad de que se presente un determinando suceso es igual al número de casos favorables a ese suceso dividido por el número total de casos posibles:

$$p(A) = \frac{\text{n}^{\text{o}}\text{ casos favorables}}{\text{n}^{\text{o}}\text{ casos posibles}}$$

Definición axiomática de probabilidad:

Una probabilidad p es una función que asocia a cada suceso A del espacio de sucesos S , un número real p(A), es decir: p : S → R , y que cumple las propiedades:

1. 0 ≤ p(A) ≤ 1, (es decir, cualquier suceso tiene probabilidad positiva y menor o igual que 1).
2. p(E) = 1 (la probabilidad del suceso seguro es 1).
3. Si A y B son incompatibles, es decir A ∩ B = □, entonces p(A U B) = p(A) + p(B). (es decir la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades si los sucesos tienen intersección vacía).

Ejemplo:

Sea un experimento aleatorio cualquiera y definamos en S (espacio de sucesos) la siguiente probabilidad:

p(A) = número de elementos del conjunto A / número total de elementos

Comprobemos que p es una probabilidad.

Para ello, comprobemos las tres propiedades:

a) Se ve que la probabilidad de cualquier suceso está entre cero y uno, puesto que cualquier conjunto que tenga elementos ya tendrá probabilidad positiva, y el número de elementos de cualquier conjunto no puede ser mayor que el número total de elementos existentes.

b) p(E) = 1, es evidente.
c) Tomemos dos sucesos A y B que no tengan elementos en común. Entonces:
p(A U B) = elementos que forman parte de A o de B / número total de elementos
= (número de elementos de A + número de elementos de B) / número total de elementos
$= p(A) + p(B)$
puesto que si A y B no tienen elementos comunes, el número de elementos de la unión es la suma de los elementos de cada conjunto por separado.
Por tanto se cumplen las 3 propiedades y p así definida es una probabilidad. Esta será la definición de probabilidad que utilicemos a partir de ahora.
Ejemplo:
Si en una urna hay 20 bolas de las cuales 8 son rojas, 7 verdes y 5 amarillas. ¿Cuál será la probabilidad de que al sacar una bola al azar esta a) roja, b) verde y c) amarilla?
Solución
p(Roja) = 8 / 20
p(Verde) = 7 / 20
p(Amarilla) = 5 / 20

VARIABLES ALEATORIAS

El cálculo de probabilidades utiliza variables numéricas que se denominan aleatorias porque sus valores los determina el azar. En todo proceso de observación o experimento podemos definir una variable aleatoria asignando a cada resultado del experimento un número:

Si el resultado del experimento es numérico porque contamos o medimos, los posibles valores de la variable coinciden con los resultados del experimento.

Si el resultado es cualitativo, hacemos corresponder a cada resultado un número arbitrariamente, por ejemplo 0 si un elemento es bueno y 1 si es defectuoso.
Diremos que se ha definido una variable aleatoria o que se ha construido un modelo de distribución de probabilidad cuando se especifican los posibles valores de las variables con sus probabilidades respectivas.

Variable aleatoria discreta: Diremos que una v.a. es discreta cuando toma un número de valores finitos, o infinito numerable. Corresponde con experimentos en los que se cuenta el número de veces que ha ocurrido un suceso. La distribución suele definirse mediante la función de probabilidad o la de distribución.

Variable aleatoria continua: Diremos que una v.a. es continua cuando puede tomar cualquier valor en un intervalo: peso, tiempo de duración de un evento, etc.

Una distribución de probabilidad indica toda la gama de valores que pueden representarse como resultado de un experimento. Una distribución de probabilidad es similar al distribución de frecuencias relativas .Si embargo, en vez de describir el pasado, describe la probabilidad que un evento se realice en el futuro, constituye una herramienta fundamental para la prospectiva, puesto que se puede diseñar un escenario de acontecimientos futuros considerando las tendencias actuales de diversos fenómenos naturales.
Las decisiones estadísticas basadas en la estadística inferencial son fundamentales en la investigación que son evaluadas en términos de distribución de probabilidades.

Así pues una distribución de probabilidad muestra todos los resultados posibles de un experimento y la probabilidad de cada resultado.
¿Cómo generamos una distribución de probabilidad?
Supongamos que se quiere saber el número de caras que se obtienen al lanzar cuatro veces una moneda al aire?
Es obvio que, el hecho de que la moneda caiga de costado se descarta.
Los posibles resultados son: cero caras, una cara, dos caras, tres caras y cuatro caras.
Si realizamos el experimento obtenemos el siguiente espacio muestral:

$$\Omega = \{cccc, cccs, ccsc, ccss, cscc, cscs, cssc, csss, sccc, sccs, scsc, scss, sscc, sscs, sssc, ssss\}$$

$n(\Omega) = 16$

NUMERO DE CARAS	FRECUENCIA	DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES
0	1	1/16
1	4	4/16
2	6	6/16
3	4	4/16
4	1	1/16

La probabilidad de cada resultado especifico va desde cero hasta uno inclusive

$$\sum_{k=0}^{4} P(X_k) = 1$$

Media de una Distribución de Probabilidades.-Valor promedio a largo plazo de la variable aleatoria, también es conocido como valor esperado. Esta media es un promedio ponderado, en el que los valores posibles se ponderan mediante sus probabilidades correspondientes de ocurrencia, se calcula con la formula:

$$\mu = \sum XP(X) \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

Donde P(X) es la probabilidad que puede tomar la variable aleatoria X.
Varianza.- Mide el grado de dispersión de la distribución de probabilidades, siendo la formula:

$$\sigma^2 = \sum (X - \mu)^2 P(X)$$

También se aplica la fórmula:

$$\sigma^2 = \sum XP(X) - \mu^2$$

Desviación Estándar.-Es la raíz cuadrad del varianza, luego:

$$\sqrt{\sigma^2} = \sigma = \sqrt{\sum XP(X) - \mu^2}$$