

Geometría

B

B.1 Parábolas, elipses e hipérbolas

Además de las curvas asociadas a líneas rectas, funciones trigonométricas o a cualquier otra función elemental, hay tres curvas que tienen una destacada importancia: las *secciones cónicas*. Los griegos ya conocían que el corte de un cono por un plano producía sólo tres tipos de curvas: parábolas, elipses e hipérbolas. Vamos a comentarlas con más detalle.

B.1.1 Parábola

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax^2 + bx + c\}$$

Una parábola es el conjunto de puntos que equidistan de un punto dado, llamado *foco*, y de una recta llamada *directriz*. La recta perpendicular a la directriz y que pasa por el foco se llama *eje* de la parábola. La intersección del eje y de la directriz se llama *vértice*.

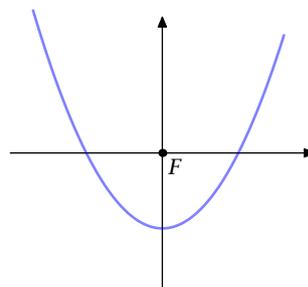


Ilustración B.1 Parábola

B.1.2 Elipse

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

Una elipse es el conjunto de puntos verificando que la suma de las distancias a dos puntos fijos (F y F'), llamados *focos*, es una constante mayor que la distancia entre los focos. El punto medio del segmento que une los focos se llama *centro*. El segmento que pasa por los dos focos y acaba en la elipse se llama *eje mayor*. El segmento perpendicular al eje mayor y que acaba en la elipse es el *eje menor*. Las intersecciones de los ejes con la elipse se llaman *vértices* de la elipse. Los focos son los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ que verifican $a^2 = b^2 + c^2$. El caso particular $a = b$ es conocido: la *circunferencia*.

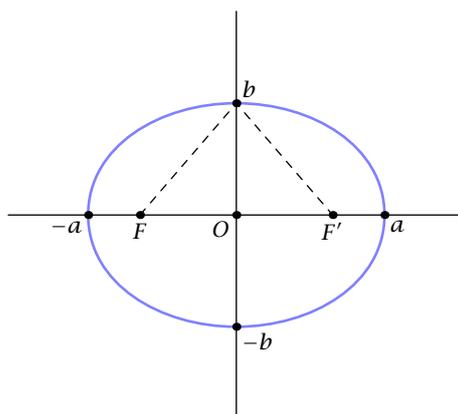


Ilustración B.2 Elipse

Las ecuaciones que hemos escrito describen elipses o circunferencias centradas en el origen de coordenadas. Si el centro está en el punto (h, k) la ecuación es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Es inmediato comprobar que la circunferencia de radio r centrado en el punto (h, k) es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

B.1.3 Hipérbola

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

Una hipérbola es el conjunto de puntos que verifican que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos, llamados *focos*, es una constante positiva menor que la distancia entre los focos (F y F').

B.2 Superficies cuadráticas

a) **Esfera:** $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

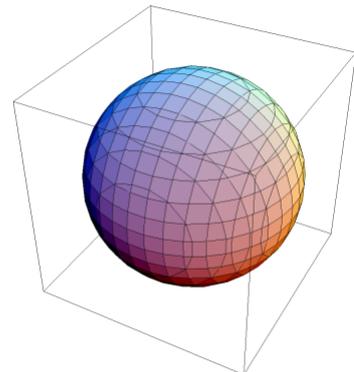
Secciones paralelas al plano xy : circunferencias.

Secciones paralelas al plano xz : circunferencias.

Secciones paralelas al plano yz : circunferencias.

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\text{Área} = 4\pi R^2$$

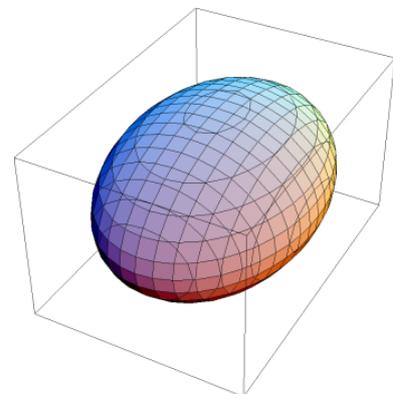


b) **Elipsoide:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Secciones paralelas al plano xy : Elipses.

Secciones paralelas al plano xz : Elipses.

Secciones paralelas al plano yz : Elipses.



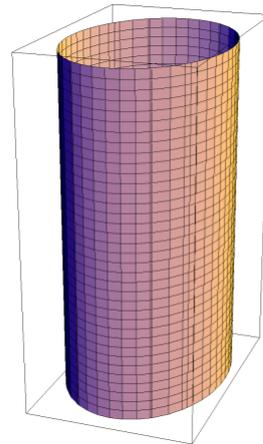
c) **Cilindro elíptico:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Secciones paralelas al plano xy : elipses.

Secciones paralelas al plano xz : rectas.

Secciones paralelas al plano yz : rectas.

Volumen = $\pi ab \times \text{altura}$

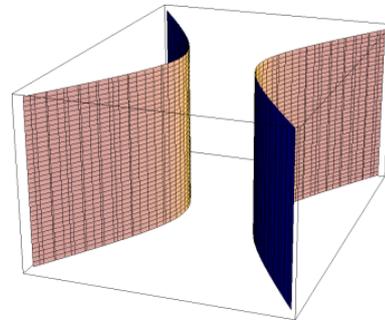


d) **Cilindro hiperbólico:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Secciones paralelas al plano xy : hipérbolas.

Secciones paralelas al plano xz : rectas.

Secciones paralelas al plano yz : rectas.

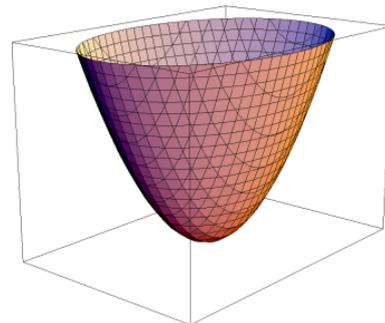


e) **Paraboloide elíptico:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$

Secciones paralelas al plano xy : Elipses.

Secciones paralelas al plano xz : Parábolas.

Secciones paralelas al plano yz : Parábolas.

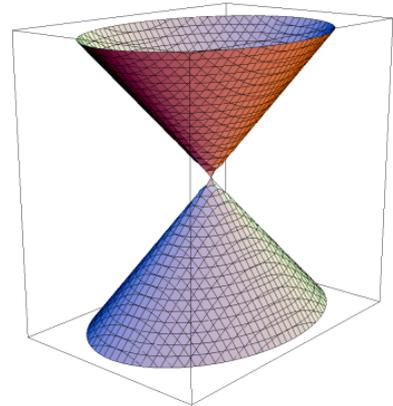


f) **Cono elíptico:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

Secciones paralelas al plano xy : Elipses.

Secciones paralelas al plano xz : Hipérbolas.

Secciones paralelas al plano yz : Hipérbolas.

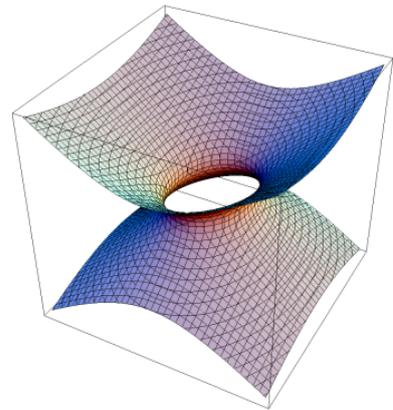


g) **Hiperboloide elíptico de una hoja:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Secciones paralelas al plano xy : Elipses.

Secciones paralelas al plano xz : Hipérbolas.

Secciones paralelas al plano yz : Hipérbolas.

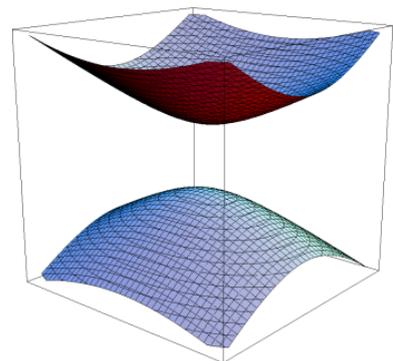


h) **Hiperboloide elíptico de dos hojas:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

Secciones paralelas al plano xy : Elipses.

Secciones paralelas al plano xz : Hipérbolas.

Secciones paralelas al plano yz : Hipérbolas.



i) **Paraboloide hiperbólico:** $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = z$

Secciones paralelas al plano xy : Hipérbolas.

Secciones paralelas al plano xz : Parábolas.

Secciones paralelas al plano yz : Parábolas.

