Tema 4

Funciones trigonométricas

Va a aparecer aquí una nueva familia de funciones reales de variable real: las funciones trigonométricas. Existen varias formas de introducir estas funciones, ninguna de las cuales es del todo fácil. El método que vamos a seguir es laborioso, no es el más efectivo o elegante, pero a cambio es el más elemental e intuitivo, pues la definición de las funciones seno y coseno se basa en las nociones de seno y coseno de un ángulo, que suponemos conocidas aunque sólo las usaremos a título orientativo.

Necesitamos trabajar en $\mathbb{R}^2$, el *plano real*, que ya apareció al considerar la gráfica de una función real de variable real. Empezamos definiendo la *distancia euclídea* entre dos puntos del plano y comprobando sus propiedades básicas, entre las que destaca la *desigualdad triangular*. Acto seguido consideramos *curvas* en el plano y, cuando ello es posible, definimos la *longitud* de una curva. Esto permite "medir" la longitud de un arco de circunferencia, lo que equivale a medir un ángulo en radianes, y dar una definición del número π.

Usando la longitud de un arco de circunferencia podemos obtener fácilmente la función *arco coseno*, cuya inversa es la función *coseno*, definida de momento sólo en el intervalo $[0,\pi]$. A partir de ella se define la función *seno* en el mismo intervalo y ambas se extienden fácilmente para obtener funciones definidas en todo $\mathbb{R}$, cuyas propiedades básicas, como la continuidad, iremos estudiando.

Finalmente definimos el resto de las funciones trigonométricas y sus inversas, haciendo un estudio preliminar de las mismas. Habremos completado así la gama de funciones reales de variable real que manejaremos en el estudio del cálculo diferencial e integral, para obtener ejemplos y aplicaciones de los principales resultados.

4.1. Distancia euclídea en el plano

Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$ cuyos elementos se interpretan geométricamente como los puntos de un plano en el que hemos fijado ejes cartesianos, de forma que cada par ordenado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se identifica con el punto de abscisa x y ordenada y. Por ello es costumbre referirse a $\mathbb{R}^2$ como el *plano real*, o simplemente *el plano*.

La definición de la distancia euclídea en $\mathbb{R}^2$ resulta obvia si queremos que se verifique el Teorema de Pitágoras. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$, $\alpha = (x_1, y_1)$ y $\beta = (x_2, y_2)$, con $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, la *distancia euclídea*, o simplemente la *distancia*, de α a β es, por definición, el número real no negativo $d(\alpha, \beta)$ dado por

$$d(\alpha, \beta) = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right]^{1/2}$$

Veamos las tres propiedades básicas de la distancia euclídea que vamos a necesitar:

- *Para* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$*, se tiene:* $d(\alpha, \beta) = 0 \iff \alpha = \beta$
- $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$
- $d(\alpha_1, \alpha_3) \leqslant d(\alpha_1, \alpha_2) + d(\alpha_2, \alpha_3) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^2$

Las dos primeras propiedades son evidentes. La tercera se conoce como *desigualdad triangular*, por su clara interpretación geométrica: la longitud de un lado de un triángulo es menor o igual que la suma de las longitudes de los otros dos lados. Para demostrarla, pongamos $\alpha_k = (x_k, y_k)$, con $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ para $k = 1, 2, 3$ y, para simplificar la notación, pongamos $a = x_2 - x_1$, $b = y_2 - y_1$, $u = x_3 - x_2$ y $v = y_3 - y_2$. Se tiene entonces claramente

$$\begin{aligned}
d(\alpha_1, \alpha_3)^2 &= (a+u)^2 + (b+v)^2 = a^2 + b^2 + u^2 + v^2 + 2(au + bv) \\
&\leqslant a^2 + b^2 + u^2 + v^2 + 2\left[(au + bv)^2 + (av - bu)^2\right]^{1/2} \\
&= a^2 + b^2 + u^2 + v^2 + 2(a^2 + b^2)^{1/2}(u^2 + v^2)^{1/2} \\
&= d(\alpha_1, \alpha_2)^2 + d(\alpha_2, \alpha_3)^2 + 2d(\alpha_1, \alpha_2)d(\alpha_2, \alpha_3) \\
&= \left[d(\alpha_1, \alpha_2) + d(\alpha_2, \alpha_3)\right]^2
\end{aligned}$$

de donde se deduce la desigualdad buscada. ■

Veamos dos estimaciones de la distancia euclídea que resultan útiles con mucha frecuencia. Su comprobación es evidente:

- *Para cualesquiera* $\alpha = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ *y* $\beta = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$*, se tiene:*

$$\text{máx}\,\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\} \leqslant d(\alpha, \beta) \leqslant |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

4.2. Longitud de una curva plana

Llamaremos *curva plana*, o simplemente *curva* a toda aplicación $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, definida en un intervalo cerrado y acotado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (entenderemos siempre que $a \leqslant b$), que tenga la forma

$$\gamma(t) = \big((\varphi(t), \psi(t)\big) \qquad \forall t \in [a, b] \tag{1}$$

donde $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones *continuas* en $[a, b]$.

Esta definición tiene una interpretación física bastante obvia: podemos pensar en un móvil que durante el intervalo de tiempo $[a,b]$ realiza un determinado movimiento en el plano, de forma que su posición en cada instante $t \in [a,b]$ es el punto $\gamma(t)$. Por ello, resulta natural decir que el punto $\gamma(a)$ es el *origen* de la curva γ y que el punto $\gamma(b)$ es el *extremo* de γ. También se comprende claramente por qué exigimos que las funciones φ y ψ sean continuas en $[a,b]$. En Física suele decirse que la igualdad (1) es la *ecuación del movimiento* que, también por razones obvias, suele escribirse en la forma

$$x = \varphi(t)\,, \quad y = \psi(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

En Matemáticas, la palabra "curva" puede tener significados diferentes según el contexto. Es frecuente llamar *curva plana en forma paramétrica* a lo que aquí hemos llamado simplemente curva plana.

Es importante distinguir claramente entre la curva γ, una aplicación con valores en $\mathbb{R}^2$, y la imagen de dicha aplicación, esto es, el conjunto

$$\gamma\big([a,b]\big) \,=\, \big\{\gamma(t)\,:\, t \in [a,b]\big\} \subset \mathbb{R}^2$$

que es el conjunto que dibujamos para visualizar gráficamente la curva, aunque evidentemente hay muchos aspectos de la curva que no se reflejan adecuadamente en dicho conjunto. En la interpretación física, este conjunto es la *trayectoria* descrita por el móvil y es evidente que movimientos muy diferentes pueden recorrer la misma trayectoria.

Veamos algunos ejemplos sencillos de curvas. Dada una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que sea continua en $[a,b]$, podemos considerar la curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma(t) \,=\, \big(t, f(t)\big) \quad \forall t \in [a,b]$$

que evidentemente cumple

$$\gamma\big([a,b]\big) = \big\{\big(t, f(t)\big)\,:\, t \in [a,b]\big\} \,=\, \operatorname{Gr} f$$

es decir, la imagen de la curva γ coincide con la gráfica de la función f. Para las curvas de este tipo se dice a veces que vienen dadas en *forma explícita*, pues toda la información necesaria para definir la curva se resume en la ecuación $y = f(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$.

Para ver otro ejemplo, dados dos puntos $\alpha = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ y $\beta = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, podemos considerar la curva $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\sigma(t) \,=\, \big((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2\big) \quad \forall t \in [0,1]$$

Por razones obvias, pero con un claro abuso de lenguaje, suele decirse que σ es el *segmento de origen* α *y extremo* β. Usando la estructura de espacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ podemos escribir simplemente $\sigma(t) = (1-t)\alpha + t\beta$ para todo $t \in [0,1]$.

Como motivación para definir la longitud de una curva es natural pensar que la longitud del segmento recién definido debe ser la distancia $d(\alpha, \beta)$, pero también está claro que, en general, la longitud de una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ puede ser mucho mayor que la distancia $d\big(\gamma(a), \gamma(b)\big)$. Dicho de forma intuitiva, lo que haremos para definir la longitud de una curva será intentar aproximarla por "poligonales."

Llamaremos *partición* de un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, a todo subconjunto finito de $[a,b]$ que contenga a los extremos a y b, y denotaremos por $\mathcal{F}[a,b]$ al conjunto de todas las particiones del intervalo $[a,b]$, que salvo en el caso trivial $a=b$ es un conjunto infinito. Los puntos de una partición se numeran siempre de menor a mayor; más concretamente, si para $P \in \mathcal{F}\big([a,b]\big)$, escribimos $P=\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$ se sobreentiende que $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$. Para resaltar este convenio podemos también escribir $P=\{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\}$.

Pues bien, dada una curva $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ y una partición $P=\{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\}$ del intervalo $[a,b]$, escribiremos

$$\lambda(\gamma,P)=\sum_{k=1}^{n} d\big(\gamma(t_{k-1}),\gamma(t_k)\big)$$

Intuitivamente, los puntos $\gamma(t_j)$, para $j=0,1,\ldots,n$, son los vértices de una poligonal o una cadena de segmentos, y $\lambda(\gamma,P)$ se interpreta como la "longitud" de dicha poligonal, suma de las "longitudes" de los segmentos que la forman. Claramente, la longitud de la curva γ, que queremos definir, debe ser mayor o igual que $\lambda(\gamma,P)$ para toda partición $P\in\mathcal{F}[a,b]$. Cuando el conjunto $\{\lambda(\gamma,P) : P\in\mathcal{F}[a,b]\}$ no está mayorado, podemos pensar que la curva γ tiene longitud "infinita", cosa que tiene poca utilidad. Pero cuando dicho conjunto está acotado, la longitud de γ debe ser un mayorante del mismo. Si ahora pensamos que las poligonales asociadas a particiones muy grandes del intervalo deberían ajustarse muy bien a la curva que pretendemos medir, la elección de ese mayorante es clara, debemos tomar el supremo. Quedan así motivadas las definiciones que siguen.

Una curva $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ es *rectificable* cuando el conjunto $\{\lambda(\gamma,P) : P\in\mathcal{F}[a,b]\}$ está mayorado, en cuyo caso, la *longitud* de la curva γ es, por definición, el número real no negativo dado por

$$\Lambda(\gamma) = \sup\big\{\lambda(\gamma,P) : P\in\mathcal{F}[a,b]\big\}$$

Observemos, como primer ejemplo trivial, que si la curva γ es constante en todo el intervalo $[a,b]$, evidentemente γ es rectificable con $\Lambda(\gamma)=0$, cosa que en particular ocurre cuando $a=b$. En otro caso, si $a<b$ y $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ es una curva rectificable no constante, se tiene $\Lambda(\gamma)>0$. Esto es evidente, pues si $t\in[a,b]$ es tal que $\gamma(t)\neq\gamma(a)$, usando la partición $P=\{a,t,b\}$, que puede tener dos o tres puntos, tenemos claramente:

$$\Lambda(\gamma) \geqslant \lambda(\gamma,P) \geqslant d\big(\gamma(a),\gamma(t)\big) > 0$$

Veamos por ejemplo el caso particular del segmento σ de extremos $\alpha=(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ y $\beta=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$. Se tiene entonces $\sigma(t)=\big(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1)\big)$ para todo $t\in[0,1]$. Para cualquier partición $P=\{0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1\}$ del intervalo $[0,1]$ tenemos claramente

$$d\big(\sigma(t_{k-1}),\sigma(t_k)\big)=(t_k-t_{k-1})\,d(\alpha,\beta) \quad (k=1,2,\ldots,n)$$

con lo que $\lambda(\sigma,P)=d(\alpha,\beta)$. Puesto que $P\in\mathcal{F}[0,1]$ era arbitraria, vemos que σ es rectificable con $\Lambda(\sigma)=d(\alpha,\beta)$, como cabía esperar.

Por sorprendente que a primera vista pueda parecer, existen curvas no rectificables, más adelante veremos algún ejemplo. El siguiente resultado nos proporciona abundantes ejemplos de curvas rectificables:

- *Si $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ son monótonas y continuas en $[a,b]$, entonces la curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, definida por $\gamma(t) = \big(\varphi(t), \psi(t)\big)$ para todo $t \in [a,b]$, es rectificable y se verifica que*

$$\Lambda(\gamma) \leqslant |\varphi(b) - \varphi(a)| + |\psi(b) - \psi(a)| \tag{2}$$

Para probarlo, consideramos una partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$ y observamos que $\varphi(b) - \varphi(a) = \sum_{k=1}^{n} \big(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\big)$. Suponiendo primero que φ es creciente, esta igualdad puede escribirse en la forma

$$\big|\varphi(b) - \varphi(a)\big| = \sum_{k=1}^{n} \big|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\big|$$

Si φ es decreciente podemos aplicar lo anterior a la función $-\varphi$ obteniendo la misma igualdad. Naturalmente, ψ también verifica esa igualdad. Usando la estimación de la distancia euclídea vista anteriormente, tenemos:

$$\begin{aligned}
\lambda(\gamma, P) &= \sum_{k=1}^{n} d\big(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)\big) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \big|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\big| + \sum_{k=1}^{n} \big|\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})\big| \\
&= |\varphi(b) - \varphi(a)| + |\psi(b) - \psi(a)|
\end{aligned}$$

Esto demuestra ya que γ es rectificable y que se verifica (2). ■

Necesitamos una propiedad importante de la longitud de una curva que, dicho de forma intuitiva, explica lo que ocurre al subdividir una curva en dos “trozos”, y de paso le da mayor interés al resultado anterior.

- *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva y, para $c \in]a,b[$, sean $\gamma_1 : [a,c] \to \mathbb{R}^2$ y $\gamma_2 : [c,b] \to \mathbb{R}^2$ las curvas que se obtienen al restringir γ a los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente. Entonces γ es rectificable si, y sólo si, lo son γ_1 y γ_2, en cuyo caso se tiene*

$$\Lambda(\gamma) = \Lambda(\gamma_1) + \Lambda(\gamma_2) \tag{3}$$

Para demostrarlo, supongamos primero que γ es rectificable, tomemos particiones $P_1 \in \mathcal{F}[a,c]$ y $P_2 \in \mathcal{F}[c,b]$, y sea $P = P_1 \cup P_2$. Es evidente que $P \in \mathcal{F}[a,b]$ y comprobamos sin dificultad que

$$\lambda(\gamma_1, P_1) + \lambda(\gamma_2, P_2) = \lambda(\gamma, P) \leqslant \Lambda(\gamma)$$

Fijando por el momento la partición P_2, la desigualdad $\Lambda(\gamma_1, P_1) \leqslant \Lambda(\gamma) - \lambda(\gamma_2, P_2)$, válida para cualquier $P_1 \in \mathcal{F}[a,c]$ nos dice que γ_1 es rectificable y se verifica que $\Lambda(\gamma_1) \leqslant \Lambda(\gamma) - \lambda(\gamma_2, P_2)$. Equivalentemente, tenemos

$$\lambda(\gamma_2, P_2) \leqslant \Lambda(\gamma) - \Lambda(\gamma_1)$$

pero ahora esta desigualdad es cierta para toda partición $P_2 \in \mathcal{F}[c,b]$, luego γ_2 es rectificable y tenemos ya $\Lambda(\gamma_1) + \Lambda(\gamma_2) \leqslant \Lambda(\gamma)$.

Para probar la implicación recíproca junto con la desigualdad que falta, lo único que impide repetir el razonamiento anterior es que una partición $P \in \mathcal{F}[a,b]$ puede no ser de la forma $P_1 \cup P_2$ con $P_1 \in \mathcal{F}[a,c]$ y $P_2 \in \mathcal{F}[c,b]$, simplemente porque puede ocurrir que $c \notin P$. Para resolver ese pequeño problema usaremos la partición $P_c = P \cup \{c\}$ y comprobaremos que $\lambda(\gamma,P) \leqslant \lambda(\gamma,P_c)$. En efecto, si $c \in P$ no hay nada que comprobar y, en otro caso, si $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ existirá un $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ tal que $t_{k-1} < c < t_k$. Entonces, comparando la definición de las sumas $\lambda(\gamma,P)$ y $\lambda(\gamma,P_c)$ observamos que

$$\lambda(\gamma,P_c) - \lambda(\gamma,P) = d\big(\gamma(t_{k-1}),\gamma(c)\big) + d\big(\gamma(c),\gamma(t_k)\big) - d\big(\gamma(t_{k-1}),\gamma(t_k)\big) \geqslant 0$$

donde hemos aplicado la desigualdad triangular.

Aclarado lo que ocurre al añadir el punto c a una partición, podemos tomar $P_1 = P_c \cap [a,c]$ y $P_2 = P_c \cap [c,b]$ obteniendo particiones de los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$, con $P_c = P_1 \cup P_2$. Por tanto, si las curvas γ_1 y γ_2 son rectificables, tenemos

$$\lambda(\gamma,P) \leqslant \lambda(\gamma,P_c) = \lambda(\gamma_1,P_1) + \lambda(\gamma_2,P_2) \leqslant \Lambda(\gamma_1) + \Lambda(\gamma_2)$$

Esto demuestra que γ es rectificable con $\Lambda(\gamma) \leqslant \Lambda(\gamma_1) + \Lambda(\gamma_2)$, que es la desigualdad que faltaba para obtener (3). ■

4.3. La semicircunferencia unidad

Vamos a considerar ahora un curva muy concreta y, para evitar repeticiones, fijamos una notación adecuada. En lo que sigue, $\varphi, \psi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ serán las funciones continuas en $[-1,1]$ definidas por $\varphi(t) = t$ y $\psi(t) = \sqrt{1-t^2}$ para todo $t \in [-1,1]$.

Llamaremos *semicircunferencia unidad* a la curva $\Gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\Gamma(t) = \big(\varphi(t),\psi(t)\big) = \big(t, \sqrt{1-t^2}\big) \quad \forall t \in [-1,1]$$

Observemos que Γ viene dada en forma explícita, su imagen es la gráfica de la función ψ. Más concretamente,

$$\Gamma\big([-1,1]\big) = \big\{\big(t,\sqrt{1-t^2}\big) : t \in [-1,1]\big\} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\,,\ y \geqslant 0\big\}$$

es la mitad superior de la circunferencia centrada en el origen y de radio 1, lo que explica el nombre que hemos dado a la curva Γ. Usando los resultados previos sobre curvas rectificables probaremos lo siguiente:

- *La semicircunferencia unidad es una curva rectificable. Su longitud es, por definición, el número real* π. *Se verifica que:* $2\sqrt{2} \leqslant \pi \leqslant 4$.

Consideremos las curvas γ_1 y γ_2 que se obtienen restringiendo Γ a los intervalos $[-1,0]$ y $[0,1]$. Puesto que la función φ es creciente en ambos intervalos, mientras que ψ es creciente en $[-1,0]$ y decreciente en $[0,1]$, tenemos que γ_1 y γ_2 son rectificables, con

$$\Lambda(\gamma_1) \leqslant |\varphi(0) - \varphi(-1)| + |\psi(0) - \psi(-1)| = 2$$
$$\Lambda(\gamma_2) \leqslant |\varphi(1) - \varphi(0)| + |\psi(1) - \psi(0)| = 2$$

Por tanto Γ es rectificable y tenemos $\pi = \Lambda(\Gamma) = \Lambda(\gamma_1) + \Lambda(\gamma_2) \leqslant 4$. Por otra parte, usando la partición $P = \{-1,0,1\}$ tenemos fácilmente $\pi \geqslant \lambda(\Gamma,P) = 2\sqrt{2}$. ■

4.4. La función arco coseno

Podemos ya dar una definición de la función arco coseno muy acorde con la intuición. Para $x \in [-1,1]$ denotamos por Γ_x a la restricción de Γ al intervalo $[x,1]$, que es una curva rectificable con $\Lambda(\Gamma_x) \leqslant \pi$.

Intuitivamente Γ_x recorre el arco de circunferencia que une los puntos $\Gamma(x) = \big(x, \sqrt{1-x^2}\big)$ y $\Gamma(1) = (1,0)$. Puesto que la circunferencia tiene radio 1, la medida en radianes del ángulo con vértice en el origen cuyos lados pasan por dichos puntos es $\Lambda(\Gamma_x)$. Pero es claro que el coseno de ese ángulo debe ser precisamente x. Así pues, el coseno del número real $\Lambda(\Gamma_x)$ debería ser x, lo que explica nuestro siguiente paso.

La función *arco coseno* es, por definición, la función $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ dada por

$$\arccos x = \Lambda(\Gamma_x) \quad \forall x \in [-1,1]$$

A continuación obtenemos las propiedades de esta función que de momento necesitamos.

- *La función arco coseno es una biyección de* $[-1,1]$ *sobre* $[0,\pi]$*. Es continua en* $[-1,1]$ *y estrictamente decreciente. Se verifica además que*

$$\arccos x + \arccos(-x) = \pi \quad \forall x \in [-1,1] \tag{4}$$

  En particular se tiene: $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos 0 = \pi/2$, $\arccos 1 = 0$.

Para la demostración, dados $x,y \in [-1,1]$ con $x \leqslant y$, conviene denotar por $\gamma_{x,y}$ a la curva que se obtiene al restringir Γ al intervalo $[x,y]$, que es rectificable. Si $x < y$, como $\gamma_{x,y}$ no es constante, podemos asegurar que $\Lambda(\gamma_{x,y}) > 0$. Entonces, subdividiendo el intervalo $[x,1]$ mediante el punto y, tenemos

$$\arccos x = \Lambda(\Gamma_x) = \Lambda(\gamma_{x,y}) + \Lambda(\Gamma_y) > \Lambda(\Gamma_y) = \arccos y$$

lo que demuestra que la función arco coseno es estrictamente decreciente.

Si ahora, además de $x \leqslant y$, suponemos $xy \geqslant 0$, las funciones φ y ψ son monótonas en el intervalo $[x,y]$, lo que nos da una estimación de la longitud de la curva $\gamma_{x,y}$. Más concretamente, tenemos

$$|\arccos x - \arccos y| = \Lambda(\gamma_{x,y}) \leqslant |y-x| + |\psi(y) - \psi(x)|$$

Puesto que la desigualdad obtenida no se altera al intercambiar x con y, también es válida en el caso $x > y$, siempre que se tenga $xy \geqslant 0$. De aquí se deduce fácilmente la continuidad del arco coseno. En efecto, dados $x \in [-1,1]$ y una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $[-1,1]$ tal que $\{x_n\} \to x$, es claro que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene $x_n x \geqslant 0$, lo que nos permite usar la desigualdad recién comprobada tomando $y = x_n$ con $n \geqslant m$. Puesto que $\{\psi(x_n)\} \to \psi(x)$ por ser ψ continua en x, deducimos claramente que $\{\arccos x_n\} \to \arccos x$.

Obtenida la continuidad, la imagen de la función arco coseno será un intervalo contenido en $[0,\pi]$, pero es evidente que $\arccos(-1) = \pi$ y $\arccos 1 = 0$, así que dicha imagen es todo el intervalo $[0,\pi]$. Nuestra función era inyectiva, por ser estrictamente decreciente, luego es biyectiva.

Para probar (4), podemos claramente suponer que $x \geqslant 0$. Si $P \in \mathcal{F}[x,1]$, es evidente que $-P = \{-t : t \in P\} \in \mathcal{F}[-1,-x]$, y recíprocamente. Además, usando que $\psi(-t) = \psi(t)$ para todo $t \in [-1,1]$, comprobamos sin dificultad que $\lambda(\gamma_{-1,-x}, -P) = \lambda(\Gamma_x, P)$, de donde se deduce que $\Lambda(\gamma_{-1,-x}) = \Lambda(\Gamma_x)$, pues ambos números son el supremo del mismo conjunto. Por tanto, tenemos finalmente

$$\pi = \Lambda(\Gamma) = \Lambda(\gamma_{-1,-x}) + \Lambda(\Gamma_{-x}) = \Lambda(\Gamma_x) + \Lambda(\Gamma_{-x}) = \arccos x + \arccos(-x) \qquad \blacksquare$$

4.5. Definición de las funciones seno y coseno

Es claro ya cómo vamos a definir la función coseno en el intervalo $[0,\pi]$, será simplemente la inversa de la función arco coseno. También está clara la definición del seno en ese mismo intervalo, y las extendemos ambas, definiéndolas en $[-\pi,\pi]$ de forma que el coseno sea una función par y el seno sea impar. No usaremos la notación habitual para estas funciones hasta que hagamos la extensión a todo $\mathbb{R}$.

Por tanto, definimos dos funciones $c, s : [-\pi,\pi] \to [-1,1]$ de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} c(x) = \arccos^{-1}(x) \;\; \forall x \in [0,\pi], & c(x) = c(-x) \;\; \forall x \in [-\pi, 0[\\ s(x) = \sqrt{1-c(x)^2} \;\; \forall x \in [0,\pi], & s(x) = -s(-x) \;\; \forall x \in [-\pi, 0[\end{array}$$

A partir de las propiedades de la función arco coseno se deducen fácilmente las de las funciones c y s que de momento vamos a necesitar:

- *Las funciones c y s son continuas en $[-\pi,\pi]$ y la imagen de ambas es el intervalo $[-1,1]$. De hecho se tiene*

$$\begin{array}{c} c(\pi) = c(-\pi) = -1\,,\;\; c(0) = 1\,,\;\; c(\pi/2) = c(-\pi/2) = 0 \\ s(\pi) = s(-\pi) = s(0) = 0\,,\;\; s(\pi/2) = 1\,,\;\; s(-\pi/2) = -1 \end{array} \tag{5}$$

La comprobación de estos hechos es inmediata. Por ser la función arco coseno una biyección de $[-1,1]$ sobre $[0,\pi]$ que es continua en $[-1,1]$, su inversa, que es la restricción de c al intervalo $[0,\pi]$, es continua en dicho intervalo. Deducimos que la restricción de s al mismo intervalo también es continua en $[0,\pi]$, como composición de funciones continuas. El carácter local de la continuidad nos permite entonces asegurar que c y s son continuas en $]0,\pi]$. Usando de nuevo que la composición de funciones continuas es continua y el carácter local de la continuidad, obtenemos que c y s son continuas en $[-\pi,0[$.

Para la continuidad en 0, usamos de nuevo la continuidad de las restricciones de c y s al intervalo $[0,\pi]$, obteniendo que $\lim\limits_{x\to 0+} c(x) = c(0) = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0+} s(x) = s(0) = 0$. Pero el cálculo de los límites por la izquierda es inmediato. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $[-\pi,0[$ tal que $\{x_n\} \to 0$, tenemos que $\{-x_n\} \to 0$ con $-x_n \in]0,\pi]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego usando los límites por la derecha ya calculados, obtenemos que $\{c(x_n)\} = \{c(-x_n)\} \to 1$ y también que $\{s(x_n)\} = \{-s(-x_n)\} \to 0$. Queda así probada la continuidad en 0:

$$\lim_{x\to 0} c(x) = 1 = c(0) \quad \text{ y } \quad \lim_{x\to 0} s(x) = 0 = s(0)$$

Comprobemos el resto de valores de c y s que aparecen en (5). Por ser $\arccos(-1) = \pi$ tenemos $c(-\pi) = c(\pi) = -1$, luego $s(-\pi) = s(\pi) = 0$. Finalmente de $\arccos 0 = \pi/2$ deducimos que $c(-\pi/2) = c(\pi/2) = 0$, luego $s(\pi/2) = 1$ y $s(-\pi/2) = -1$. Finalmente, puesto que la imagen de cualquiera de las dos funciones es un intervalo contenido en $[-1,1]$, pero ambas toman los valores -1 y 1, dicho intervalo no puede ser otro que $[-1,1]$. ■

Lo que queda para definir las funciones seno y coseno es "extender por periodicidad" las funciones c y s. Para explicar en qué consiste esta extensión debemos aclarar algunas nociones.

Se dice que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *periódica*, cuando existe $T \in \mathbb{R}^*$ tal que

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

en cuyo caso también se dice que T es un *periodo* de f. Obsérvese que entonces $-T$ es otro periodo de f, luego toda función periódica admite un periodo positivo. De hecho comprobamos fácilmente por inducción que pT también es un periodo de f para todo $p \in \mathbb{Z}$. Dado $T \in \mathbb{R}^+$, diremos a veces que una función f es *T-periódica*, para indicar simultáneamente que f es periódica y que T es un periodo de f.

Una función T-periódica queda determinada cuando se conoce su restricción a cualquier intervalo semiabierto de longitud T. Más concretamente:

- *Sean $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones periódicas con periodo $T \in \mathbb{R}^+$ y sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces:*

$$f(x) = g(x) \;\; \forall x \in [a, a+T[\;\; \Longrightarrow \;\; f(x) = g(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

Para comprobarlo, basta usar la función parte entera de la siguiente forma: para $x \in \mathbb{R}$, tomando $p(x) = E\big((x-a)/T\big)$ tenemos claramente:

$$p(x) \leqslant \frac{x-a}{T} < p(x)+1 \;\Rightarrow\; p(x)T \leqslant x-a < p(x)T+T \;\Rightarrow\; x-p(x)T \in [a, a+T[$$

y puesto que $-p(x)T$ es un periodo tanto de f como de g, deducimos que

$$g(x) = g\big(x-p(x)T\big) = f\big(x-p(x)T\big) = f(x)$$ ■

Pero recíprocamente, cualquier función definida en un intervalo de la forma $[a, a+T[$, con $a \in \mathbb{R}$ y $T \in \mathbb{R}^+$, puede extenderse, de manera única como hemos visto, para conseguir una función T-periódica. Esto es lo que se entiende por *extender por periodicidad* una función. Probamos ahora este hecho, y de paso caracterizamos la continuidad de la extensión periódica en términos de la función de partida:

- *Sean $a \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}^+$ y $h : [a, a+T[\to \mathbb{R}$ una función cualquiera. Existe una (única) función T-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que extiende a h, es decir, verifica $f(x) = h(x)$ para todo $x \in [a, a+T[$. Además, la imagen de f coincide con la de h y las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

  (i) *f es continua en $\mathbb{R}$*

  (ii) *h es continua en $[a, a+T[$ y verifica que $\displaystyle\lim_{x \to a+T} h(x) = h(a)$*

La definición de la función f se puede adivinar fácilmente. Para $x \in \mathbb{R}$, tomando igual que antes $p(x) = E\big((x-a)/T\big)$, tenemos $a \leqslant x - p(x)T < a+T$, con lo que basta escribir

$$f(x) = h\big(x - p(x)T\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para $a \leqslant x < a+T$ se tiene evidentemente $p(x) = 0$, luego $f(x) = h(x)$, así que f extiende a h. Además, para cualquier $x \in \mathbb{R}$ es claro que $p(x+T) = p(x)+1$, con lo cual

$$f(x+T) = h\big(x+T-(p(x)+1)\,T\big) = h\big(x-p(x)\,T\big) = f(x)$$

lo que demuestra que T es un periodo de f. Es claro que la imagen de f coincide con la de h. Pasamos a comprobar la equivalencia del enunciado.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Vemos que h es continua en $[a, a+T[$ por ser la restricción de f a dicho intervalo. Además, si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $[a, a+T[$ tal que $\{x_n\} \to a+T$, se tendrá que

$$\{h(x_n)\} = \{f(x_n)\} \to f(a+T) = f(a) = h(a)\,, \qquad \text{luego} \qquad \lim_{x \to a+T} h(x) = h(a)$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. Por hipótesis, la restricción de f al intervalo $[a, a+T[$ es continua en dicho intervalo. Aplicando el carácter local de la continuidad deducimos que f es continua en el intervalo abierto $]a, a+T[$. En el punto a, usando el carácter local del límite por la derecha de una función en un punto, podemos asegurar de momento que $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = h(a) = f(a)$.

La otra hipótesis sobre h nos permitirá probar que el límite por la izquierda de f en a también es $f(a)$. De nuevo por el carácter local de dicho límite, bastará tomar una sucesión $\{y_n\} \to a$, con $a - T < y_n < a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y comprobar que $\{f(y_n)\} \to f(a)$. Puesto que $\{y_n + T\} \to a+T$ con $a < y_n + T < a+T$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la hipótesis sobre h nos dice que $\{h(y_n+T)\} \to h(a)$, luego $\{f(y_n)\} = \{f(y_n+T)\} = \{h(y_n+T)\} \to h(a) = f(a)$.

Sabiendo que f es continua en $[a, a+T[$ las cosas son ya fáciles. Dados $x \in \mathbb{R}$ y una sucesión $\{x_n\} \to x$, tenemos que $\{x_n - p(x)T\} \to x - p(x)T \in [a, a+T[$, y la continuidad de f en el punto $x - p(x)T$ nos dice que $\{f(x_n)\} = \{f(x_n - p(x)T\} \to f(x - p(x)T) = f(x)$. ■

Aplicaremos lo recién demostrado en una situación especialmente favorable:

- *Sean $a \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}^+$ y $h : [a, a+T] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, a+T]$ tal que $h(a) = h(a+T)$. Entonces existe una única función T-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que extiende a h, es decir, verifica $f(x) = h(x)$ para $a \leqslant x \leqslant a+T$. Además, f es continua en $\mathbb{R}$ y su imagen coincide con la de h.*

En efecto, basta aplicar el resultado anterior, restringiendo h al intervalo $[a, a+T[$, pero sin olvidar que por la continuidad en el punto $a+T$ se tiene $\lim\limits_{x \to a+T} h(x) = h(a+T) = h(a)$. Aparece una única función T-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica $f(x) = h(x)$ para $a \leqslant x < a+T$. Basta entonces observar que $f(a+T) = f(a) = h(a) = h(a+T)$, con lo que f extiende a h. Sabemos además que f es continua en $\mathbb{R}$ y su imagen coincide con la de h. ■

Para obtener las funciones seno y coseno, basta aplicar el resultado anterior a las funciones c y s, tomando lógicamente $a = -\pi$ y $T = 2\pi$:

La *función coseno* es, por definición, la única función 2π-periódica $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que extiende a la función c. Por tanto, se caracteriza por:

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ \cos x = c(x) \ \ \forall x \in [-\pi, \pi], \ \ \cos(x + 2\pi) = \cos x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Análogamente, la *función seno* es la única función 2π-periódica $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que extiende a la función s, luego queda caracterizada por:

$$\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ \operatorname{sen} x = s(x) \ \ \forall x \in [-\pi, \pi], \ \ \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

A la vista de toda la discusión anterior, tenemos las primeras propiedades de las funciones seno y coseno, sobre las que conviene insistir:

- *Las funciones seno y coseno son continuas en* $\mathbb{R}$ *y* 2π*-periódicas. La imagen de cualquiera de ellas es el intervalo* $[-1, 1]$.

Para el resto de las propiedades que por ahora podemos probar, estudiamos por separado ambas funciones y después la relación entre ambas. Puesto que la periodicidad jugará un papel clave en este estudio, introducimos una notación que nos permita manejarla con facilidad. Para $x \in \mathbb{R}$ escribiremos

$$p(x) = E\left(\frac{x + \pi}{2\pi}\right) \quad \text{y} \quad \hat{x} = x - 2p(x)\pi$$

con lo cual tenemos $p(x) \in \mathbb{Z}$ y $-\pi \leqslant \hat{x} < \pi$. Usaremos frecuentemente que

$$\cos x = \cos \hat{x} = c(\hat{x}) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \hat{x} = s(\hat{x})$$

4.6. Propiedades de la función coseno

Las resumimos en un sólo enunciado:

(i) La función coseno es par: $\cos(-x) = \cos x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

(ii) La restricción de la función coseno al intervalo $[0, \pi]$ *es una biyección estrictamente decreciente de dicho intervalo sobre* $[-1, 1]$.

(iii) Se verifica que $\cos(x + \pi) = -\cos x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Por tanto,*

$$\cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

(iv) Se tiene:

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} : \cos x = 1\} &= \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ \{x \in \mathbb{R} : \cos x = -1\} &= \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ \{x \in \mathbb{R} : \cos x = 0\} &= \{(\pi/2) + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

(v) La función coseno no tiene límite ni diverge en $+\infty$ *ni en* $-\infty$.

(i). Se tiene: $\cos x = c(\hat{x}) = c(-\hat{x}) = \cos(-\hat{x}) = \cos(-x + 2p(x)\pi) = \cos(-x)$.

(ii). Basta recordar que la restricción de la función coseno al intervalo $[0, \pi]$ es la inversa de la función arco coseno.

(iii). Supongamos primeramente que $x \in [0, \pi]$ y sea $y = \cos x$. Sabemos que

$$x = \arccos y = \pi - \arccos(-y), \quad \text{de donde,} \quad \cos(\pi - x) = -y = -\cos x$$

Usando la periodicidad y paridad del coseno, concluimos que

$$\cos(x + \pi) = \cos(x - \pi) = \cos(\pi - x) = -\cos x$$

Para $x \in [-\pi, 0]$, lo anterior puede aplicarse a $x + \pi \in [0, \pi]$, obteniendo

$$\cos(x + \pi) = -\cos(x + 2\pi) = -\cos x$$

Finalmente, para $x \in \mathbb{R}$ arbitrario, lo ya demostrado puede aplicarse a $\hat{x}$ obteniendo

$$\cos x = \cos \hat{x} = -\cos(\hat{x} + \pi) = -\cos(x - 2p(x)\pi + \pi) = -\cos(x + \pi)$$

(iv). Las tres inclusiones en un sentido se deducen claramente de propiedades ya probadas. Concretamente, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ se tiene:

$$\begin{aligned} &\cos(2k\pi) = \cos 0 = 1; \quad \cos((2k+1)\pi) = \cos \pi = -1; \\ &\cos((\pi/2) + k\pi) = (-1)^k \cos(\pi/2) = 0 \end{aligned}$$

Las otras tres inclusiones también son fáciles. Dado $x \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned} &\cos x = 1 \Rightarrow \hat{x} = 0 \Rightarrow x = 2k\pi \text{ con } k = p(x) \in \mathbb{Z} \\ &\cos x = -1 \Rightarrow \hat{x} = -\pi \Rightarrow x = (2k+1)\pi \text{ con } k = p(x) - 1 \in \mathbb{Z} \\ &\cos x = 0 \Rightarrow \hat{x} = \pm\pi/2 \Rightarrow x = (\pi/2) + k\pi \text{ con } k \in \{2p(x), 2p(x) - 1\} \subset \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(v). La posibilidad de divergencia está claramente descartada por ser $|\cos x| \leqslant 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para la no existencia de límites basta observar que $\{\cos n\pi\} = \{\cos(-n\pi)\} = \{(-1)^n\}$. ■

4.7. Propiedades de la función seno

Guardan un claro paralelismo con las del coseno:

(i) La función seno es impar: $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

(ii) La restricción de la función seno al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ *es una biyección estrictamente creciente de dicho intervalo sobre* $[-1, 1]$.

(iii) Se verifica que $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Por tanto,*

$$\operatorname{sen}(x + k\pi) = (-1)^k \operatorname{sen} x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

(iv) Se tiene:

$$\{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x = 0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x = 1\} = \{(\pi/2) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x = -1\} = \{(-\pi/2) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

(v) La función seno no tiene límite ni diverge en $+\infty$ ni en $-\infty$.

(i). Se tiene: $\operatorname{sen}(-x) = \operatorname{sen}(-\hat{x} - 2p(x)\pi) = \operatorname{sen}(-\hat{x}) = s(-\hat{x}) = -s(\hat{x}) = -\operatorname{sen} x$.

(ii). Dados $x, y \in [-\pi/2, \pi/2]$ con $x < y$, bastará ver que $\operatorname{sen} x < \operatorname{sen} y$, es decir, $s(x) < s(y)$, pues entonces tendremos una función estrictamente creciente y continua en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuya imagen ha de ser $[-1,1]$, ya que $\operatorname{sen}(-\pi/2) = -1$ y $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$. Si $0 \leqslant x$ tenemos $c(x) > c(y)$ luego $s(x) = \sqrt{1 - c(x)^2} < \sqrt{1 - c(y)^2} = s(y)$. En el caso $y \leqslant 0$, de $0 \leqslant -y < -x$ deducimos $s(-y) < s(-x)$, luego $s(x) = -s(-x) < -s(-y) = s(y)$. Finalmente, si $x < 0 < y$ tenemos $s(x) < 0 < s(y)$.

(iii). Supongamos primeramente que $x \in [-\pi, 0]$, con lo que $x + \pi \in [0, \pi]$ y tenemos

$$-\operatorname{sen} x = s(-x) = \sqrt{1 - c(-x)^2} = \sqrt{1 - c(x+\pi)^2} = s(x+\pi) = \operatorname{sen}(x+\pi)$$

Para $x \in [0, \pi]$, lo anterior puede aplicarse a $x - \pi \in [-\pi, 0]$, obteniendo

$$\operatorname{sen}(x+\pi) = \operatorname{sen}(x-\pi) = -\operatorname{sen} x$$

Finalmente, para $x \in \mathbb{R}$ arbitrario, lo ya demostrado puede aplicarse a $\hat{x} \in [-\pi, \pi]$ obteniendo

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \hat{x} = -\operatorname{sen}(\hat{x}+\pi) = -\operatorname{sen}(x - 2p(x)\pi + \pi) = -\operatorname{sen}(x+\pi)$$

(iv). Tres inclusiones se deducen de propiedades ya probadas. Concretamente, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ se tiene:

$$\operatorname{sen}(k\pi) = (-1)^k \operatorname{sen} 0 = 0; \qquad \operatorname{sen}((\pi/2) + 2k\pi) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1;$$
$$\operatorname{sen}((-\pi/2) + 2k\pi) = \operatorname{sen}(-\pi/2) = -1$$

Recíprocamente, dado $x \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \hat{x} \in \{-\pi, 0\} \Rightarrow x = k\pi \text{ con } k \in \{2p(x) - 1, 2p(x)\} \subset \mathbb{Z}$$
$$\operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow \hat{x} = \pi/2 \Rightarrow x = (\pi/2) + 2k\pi \text{ con } k = p(x) \in \mathbb{Z}$$
$$\operatorname{sen} x = -1 \Rightarrow \hat{x} = -\pi/2 \Rightarrow x = (-\pi/2) + 2k\pi \text{ con } k = p(x) \in \mathbb{Z}$$

(v). No tiene límite en $+\infty$ ni en $-\infty$ porque $\{\operatorname{sen}((\pi/2) + n\pi)\} = \{\operatorname{sen}((\pi/2) - n\pi)\} = \{(-1)^n\}$. Tampoco diverge, porque $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Obsérvese que hemos destacado dos intervalos en los que las funciones coseno y seno son inyectivas y toman todos sus valores. La función inversa de la restricción del coseno al intervalo $[0, \pi]$ se había estudiado previamente, es la función arco coseno. Para la función seno, restringida al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, lo hacemos ahora:

La *función arco seno*, $\operatorname{arc sen} : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, es la inversa de la restricción de la función seno al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Por tanto:

- *La función arco seno es una biyección de $[-1,1]$ sobre $[-\pi/2, \pi/2]$, continua en $[-1,1]$ y estrictamente creciente, con* $\operatorname{arc sen}(-1) = -\pi/2$, $\operatorname{arc sen} 0 = 0$ *y* $\operatorname{arc sen} 1 = \pi/2$.

4.8. Relación entre el seno y el coseno

Podemos describir esta relación de la siguiente forma:

(i) Se verifica que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $x, y \in \mathbb{R}$, $\cos x = \cos y$, $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y \implies y - x = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

(iii) Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ *que verifiquen* $a^2 + b^2 = 1$, *existe un único* $x \in]-\pi, \pi]$ *tal que* $\cos x = a$ y $\operatorname{sen} x = b$.

(iv) Coordenadas polares en el plano: Todo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *con* $(x, y) \neq (0, 0)$, *se expresa de manera única como* $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta)$ *con* $\rho \in \mathbb{R}^+$ *y* $\theta \in]-\pi, \pi]$.

La demostración no ofrece demasiada dificultad:

(i). Basta observar que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = c(\hat{x})^2 + s(\hat{x})^2 = 1$.

(ii). Suponemos $x \leqslant y$, lo que no resta generalidad. Primeramente, en el caso $x, y \in [-\pi, \pi[$, de ser $c(x) = c(y)$, $s(x) = s(y)$ deduciremos que $x = y$. Si $x \geqslant 0$, basta usar la inyectividad de la función c en el intervalo $[0, \pi]$. Lo mismo ocurre cuando $y \leqslant 0$, pues c también es inyectiva en $[-\pi, 0]$. Sólo queda descartar que se tenga $x < 0 < y$. En tal caso, por ser $c(-x) = c(x) = c(y)$ tendríamos $y = -x$, pero entonces de $s(y) = s(-x) = -s(x) = -s(y)$ deduciríamos $s(y) = 0$, lo cual es imposible siendo $0 < y < \pi$. En el caso general $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \leqslant y$, por lo demostrado se tiene $\hat{x} = \hat{y}$, luego $y - x = 2k\pi$ con $k = p(y) - p(x) \in \mathbb{Z}$.

(iii). Sea $x_0 = \arccos a \in [0, \pi]$, que evidentemente verifica $\cos x_0 = a$ y $\operatorname{sen} x_0 = \sqrt{1 - a^2} = |b|$. Cuando $b \geqslant 0$ basta tomar $x = x_0$. En el caso $b < 0$ tenemos $0 < x_0 < \pi$, ya que $|a| \neq 1$, luego $-x_0 \in]-\pi, 0[$. Puesto que ahora $\operatorname{sen} x_0 = -b$, basta tomar $x = -x_0$.

Si queremos tener explícitamente x en función de a y b podemos usar la función *signo*. Escribiendo $\operatorname{sgn} b = 1$ si $b \geqslant 0$, y $\operatorname{sgn} b = -1$ si $b < 0$, tenemos $x = \operatorname{sgn} b \arccos a$.

Para probar la unicidad, sea $y \in]-\pi, \pi]$ verificando también que $\cos y = a$ y $\operatorname{sen} y = b$. Aplicando (ii) tenemos $y - x = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ pero, por ser $|y - x| < 2\pi$ tenemos que $|k| < 1$, luego $k = 0$, de donde $y = x$.

(iv). Tomamos $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ y es evidente que esta es la única elección posible de ρ. Pero entonces, aplicando (iii) deducimos que existe un único $\theta \in]-\pi, \pi]$ que verifica las igualdades buscadas: $\cos \theta = x/\rho$, $\operatorname{sen} \theta = y/\rho$. Excluido el origen, la relación entre las coordenadas cartesianas (x, y) de un punto del plano, y sus *coordenadas polares* $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi]$, es:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta; \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{sgn}(y) \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \blacksquare$$

Comentemos finalmente otra relación entre las funciones seno y coseno que se deduce de las llamadas “fórmulas de adición”:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Tomando en la segunda $y = \pi/2$ tenemos $\operatorname{sen}(x+\pi/2) = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que la función coseno puede obtenerse a partir de la función seno mediante una traslación. Más adelante, como una elegante aplicación del cálculo diferencial, probaremos las fórmulas de adición para las funciones seno y coseno. Hacerlo ahora sería demasiado laborioso.

4.9. Otras funciones trigonométricas

A partir de las funciones seno y coseno, se definen fácilmente el resto de las funciones trigonométricas, que vamos a comentar brevemente. Consideremos los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{(\pi/2) + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Definimos entonces:

(a) La *función tangente,* $\operatorname{tg} : A \to \mathbb{R}$, $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \forall x \in A$

(b) La *función secante,* $\sec : A \to \mathbb{R}$, $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} \quad \forall x \in A$

(c) La *función cosecante,* $\operatorname{cosec} : B \to \mathbb{R}$, $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \quad \forall x \in B$

(d) La *función cotangente,* $\operatorname{cotg} : B \to \mathbb{R}$, $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \quad \forall x \in B$

Las cuatro funciones anteriores no aportan grandes novedades, sus propiedades se obtienen fácilmente operando con las funciones seno y coseno. Hacemos un estudio algo más detallado de la función tangente, que puede tener más interés. Se podría hacer una discusión similar para cualquiera de las otras funciones.

- *La función tangente,* $\operatorname{tg} : A \to \mathbb{R}$, *es continua en A y verifica que*

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x \qquad \forall x \in A$$

Su restricción al intervalo abierto $]-\pi/2, \pi/2[$ *es una biyección estrictamente creciente de dicho intervalo sobre* $\mathbb{R}$*, diverge negativamente en* $-\pi/2$ *y positivamente en* $\pi/2$.

La continuidad e imparidad son inmediatas, tenemos un cociente de dos funciones continuas, una impar y otra par. Para $x \in A$ es evidente que $x+\pi \in A$, sabemos que $\operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen} x$ y $\cos(x+\pi) = -\cos x$, luego $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$.

Sea τ la restricción de la función tangente al intervalo $I =]-\pi/2, \pi/2[$ y fijemos $x, y \in I$ con $x < y$, para comprobar que $\tau(x) < \tau(y)$. Si $0 \leqslant x$ basta observar que $0 < \cos y < \cos x$ y $\operatorname{sen} x < \operatorname{sen} y$. Si $y \leqslant 0$ lo anterior se aplica al par $-y, -x$ obteniendo que $\tau(-y) < \tau(-x)$, luego $\tau(x) < \tau(y)$. Finalmente, si $x < 0 < y$ tenemos claramente $\tau(x) < 0 < \tau(y)$. Es claro que

$$\tau(x) \to -\infty \ \ (x \to -\pi/2) \quad \text{ y } \quad \tau(x) \to +\infty \ \ (x \to \pi/2)$$

luego $\tau(I)$ es un intervalo que no está mayorado ni minorado, así que $\tau(I) = \mathbb{R}$ y τ es una biyección de I sobre $\mathbb{R}$. ■

Hasta ahora la noción de función periódica sólo se ha usado para funciones definidas en toda la recta real. Sin embargo, las propiedades de la función tangente sugieren que deberíamos evitar esa limitación. Más concretamente, dado un conjunto no vacío $E \subset \mathbb{R}$, podemos decir que una función $f : E \to \mathbb{R}$ es *periódica* cuando exista $T \in \mathbb{R}^*$ verificando que:

$$\{x+T \,:\, x \in E\} = E \quad \text{y} \quad f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in E$$

Podemos decir también que T es un *periodo* de f y sigue siendo cierto que entonces kT es también un periodo de f, para todo $k \in \mathbb{Z}$. En particular tenemos siempre un periodo positivo y, para $T \in \mathbb{R}^+$ podemos decir que la función f es *T-periódica*.

Así pues, *la función tangente es π-periódica*. Puesto que para todo $x \in \mathbb{R}$ podemos encontrar $k \in \mathbb{Z}$ de forma que $x - k\pi \in]-\pi/2, \pi/2[$, toda la información acerca de la función tangente se deduce de su comportamiento en el intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$, de ahí que hayamos prestado especial atención a la restricción de la tangente a dicho intervalo, cuya función inversa procede ahora considerar.

La *función arco tangente* es, por definición, la función inversa de la restricción de la tangente al intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ y se denota por $\operatorname{arc\,tg}$. Queda pues determinada de la siguiente forma:

$$\operatorname{arc\,tg} : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[\,, \qquad \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sus primeras propiedades pueden por tanto resumirse de la siguiente forma:

- *La función arco tangente es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $]-\pi/2, \pi/2[$, es una función impar, continua en $\mathbb{R}$ y estrictamente creciente, verificando que*

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\pi/2\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \pi/2$$

4.10. Una curva que no es rectificable

Concluimos este tema con el ejemplo de curva no rectificable prometido anteriormente. Consideremos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \quad \forall x \in]0,1]\,, \quad f(0) = 0$$

La continuidad de f en $]0,1]$ no ofrece dificultad. Además, por ser $|\cos(\pi/x)| \leqslant 1$ para todo $x \in]0,1]$, tenemos $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, luego f también es continua en 0.

Vamos a comprobar que la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = \big(t, f(t)\big)$ para todo $t \in [0,1]$ no es rectificable. La observación clave es la siguiente: para $m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{1}{m}\right) - f\left(\frac{1}{m+1}\right) \right| &= \left| \frac{\cos(m\pi)}{m} - \frac{\cos((m+1)\pi)}{m+1} \right| \\ &= \left| \frac{(-1)^m}{m} - \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} \right| = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} \geqslant \frac{1}{m} \end{aligned} \tag{6}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos ahora la partición P_n del intervalo $[0,1]$ formada por los puntos: $1, 1/2, \ldots, 1/n, 0$. Más concretamente:

$$P_n = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1\} \qquad \text{donde} \qquad t_k = \frac{1}{n-k+1} \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Para la suma $\lambda(\gamma, P_n)$, usamos una estimación conocida de la distancia euclídea:

$$\lambda(\gamma, P_n) = \sum_{k=1}^{n} d\big(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)\big) \geqslant \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

Como consecuencia, usando (6) tenemos:

$$\begin{aligned}\lambda(\gamma, P_n) &\geqslant \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) \right| + \sum_{k=2}^{n} \left| f\left(\frac{1}{n-k+1}\right) - f\left(\frac{1}{n-k+2}\right) \right| \\ &\geqslant \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n-k+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\end{aligned}$$

En el último miembro de esta desigualdad nos ha aparecido la n-ésima suma parcial de la serie armónica. Puesto que la desigualdad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$ y la serie armónica es divergente, hemos probado que $\{\lambda(\gamma, P_n)\} \to +\infty$, luego el conjunto $\big\{\lambda(\gamma, P) : P \in \mathcal{F}[0,1]\big\}$ no está mayorado, es decir, la curva γ no es rectificable.

4.11. Ejercicios

1. Sea $\gamma : [-1, 2] \to \mathbb{R}^2$ la curva definida por

$$\gamma(t) = (t, t^2) \quad \forall t \in [-1, 2]$$

   Probar que γ es rectificable con $\sqrt{2}(2 + \sqrt{5}) \leqslant \Lambda(\gamma) \leqslant 8$.

2. Probar que $\operatorname{sen} x < x$ para todo $x \in]0, \pi/2[$

3. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

$$\text{(a)} \ \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \right\} \qquad \text{(b)} \ \left\{ \cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right\} \qquad \text{(c)} \ \left\{ \frac{\cos\left(\sqrt{n^2+1}\right) \log n}{n} \right\}$$

4. Dado $x \in \mathbb{R}$, estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n}}$

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \operatorname{sen} x \, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(0) = 0$$

   Estudiar la continuidad de f y su comportamiento en $+\infty$ y $-\infty$.

6. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x^\alpha \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(0) = 0$$

Estudiar la continuidad de f, según los valores de α.

7. Para $x \in \mathbb{R}$, discutir la validez de cada una de las siguientes afirmaciones:
   (a) $\operatorname{arc}\cos(\cos x) = x$
   (b) $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = x$
   (c) $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x$

8. Probar que la ecuación $\operatorname{tg} x = x$ tiene infinitas soluciones reales.

9. Sean $a \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}^-$. Estudiar el comportamiento en 0 de las funciones $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{x}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{x}\right), \quad g(x) = x f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

10. Sea $f :]0, \pi/2[\to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)^{\operatorname{sen} x} \qquad \forall x \in]0, \pi/2[$$

¿Puede extenderse f para obtener una función continua en $[0, \pi/2]$?

11. Sea $f :]0, \pi/2[\to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = (1 + \operatorname{sen} x)^{\operatorname{cotg} x} \quad \forall x \in]0, \pi/2[$$

Estudiar la continuidad de f y su comportamiento en 0 y $\pi/2$.

12. Calcular la imagen de la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\log |x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

13. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1+x}{1-x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Estudiar la continuidad de f y su comportamiento en 1, $+\infty$ y $-\infty$. Calcular su imagen.

14. Probar que la ecuación $x + e^x + \operatorname{arc\,tg} x = 0$ tiene una única solución real. Calcular la parte entera de dicha solución.

15. Sean $J = [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ y $g : J \to [-\pi/2, \pi/2]$ la función definida por

$$g(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \quad \forall x \in J$$

Probar que g es biyectiva, continua en J y estrictamente creciente. Dar una expresión explícita para la función inversa de g.