PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA

6 Proporcionalidad directa e inversa

INTRODUCCIÓN

Gran parte de los conceptos y procedimientos que se van a tratar en esta unidad son ya contenidos estudiados por los alumnos en cursos anteriores. Conceptos tales como magnitudes directa e inversamente proporcionales han sido vistos a partir del primer ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria. Posteriormente, y de manera paulatina, se van introduciendo a lo largo de esta etapa educativa todos estos contenidos hasta llegar al cuarto curso, que es donde se repasan y se amplían todos los aspectos relacionados con la proporcionalidad numérica.

Esta unidad se enclava en el bloque de números y en ella recae una buena parte del peso de la resolución de problemas aplicados a la vida cotidiana, dado que los alumnos serán capaces tras su estudio, de comprender mejor aspectos relativos a transacciones económicas sencillas, problemas bancarios de interés simple y compuesto, repartos directos e inversos de bienes, etc.

A lo largo de este tema, se irán introduciendo en un principio ejercicios sencillos en los que se tenga especial cuidado en la organización de datos y posterior encadenamiento de razonamientos, para luego potenciar en el alumnado una valoración crítica de la solución obtenida. Esto es imprescindible para una correcta comprensión del proceso de resolución y en su caso, una ulterior revisión del mismo si la solución no se ajustara a la previsión de la misma que se puede estimar al leer el enunciado.

Comprender bien esta unidad no sólo posibilita a los alumnos adquirir gran destreza en la resolución de problemas. También permite desarrollar confianza en las capacidades propias para la resolución de problemas de la vida diaria, así como un sentido crítico en la discusión de posibles resultados.

OBJETIVOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
Diferenciar entre magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales y aplicarlas a la resolución de problemas de proporcionalidad directa e inversa de la vida cotidiana.	Utilizar las propiedades de las magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales para calcular términos desconocidos en una proporción.
	Resolver problemas relacionados con la vida diaria utilizando la proporcionalidad de las magnitudes, como por ejemplo, reglas de tres inversas y directas, y repartos inversa y directamente proporcionales.
Manejar con soltura los porcentajes, tanto en su concepto más matemático como en el ámbito de otras ciencias, integrando los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas.	Resolver problemas de la vida real en los que aparezcan aumentos y disminuciones porcentuales y porcentajes sucesivos.
	Resolver problemas financieros de interés simple y compuesto, valorando la oportunidad de utilizar la hoja de cálculo y la calculadora científica en función de la cantidad y complejidad de los números.

La programación didáctica se encuentra en el CD de Programación

PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA

COMPETENCIAS BÁSICAS

– Valorar la capacidad de usar las nuevas tecnologías de la información para realizar los cálculos cuando sea preciso, en función de la cantidad y complejidad de las operaciones, así como medio de organización de datos y fuente de información (C2, C4).

– Valorar el desarrollo y resolución de un problema de manera ordenada y coherente, aplicando las destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente e incorporando habilidades para desenvolverse adecuadamente con autonomía e iniciativa personal en ámbitos de la vida y del conocimiento diversos, principalmente científicos y financieros (C1, C2, C3, C5, C8).

CONTENIDOS

Conceptos

- Razón y proporción.
- Magnitudes directamente proporcionales.
- Proporcionalidad directa.
- Porcentajes. Aumentos y disminuciones porcentuales.
- Porcentajes sucesivos.
- Magnitudes inversamente proporcionales.
- Proporcionalidad inversa.
- Repartos proporcionales: directos e inversos.
- Interés simple y compuesto.

Procedimientos

- Calcular el término desconocido de una proporción.
- Aplicar la proporcionalidad directa e inversa en la resolución de problemas: regla de tres simple, reducción a la unidad y repartos proporcionales.
- Obtener porcentajes, aumentos y disminuciones porcentuales incidiendo en el cálculo del valor inicial sobre el que se aplica el porcentaje
- Realizar porcentajes sucesivos.
- Resolver problemas financieros distinguiendo el uso del interés simple y compuesto.
- Usar la calculadora para la realización de operaciones.

Actitudes

- Gusto por un discurso coherente y razonado en la resolución de problemas.
- Valoración crítica del resultado de un problema y búsqueda de las resoluciones óptimas del mismo.
- Curiosidad por emplear los algoritmos matemáticos como medio para interpretar y comprender mejor la realidad, confiando en sus propias estrategias para desempeñar la tarea con éxito.
- Valoración de la precisión y utilidad de las nuevas tecnologías de la información para resolver problemas de la vida cotidiana.

MÁS RECURSOS

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

- En el cuaderno de atención a la diversidad puedes encontrar actividades de refuerzo (pág. 15) y actividades de ampliación (pág. 49) relativas a estos contenidos.
- También existen más actividades clasificadas por grados de dificultad en el CD Banco de actividades.

SUGERENCIAS Y MATERIALES DIDÁCTICOS

- Se puede utilizar diferentes elementos para analizar relaciones de proporcionalidad: fotografías, dibujos a escala, papel milimetrado, etc.
- Se aconseja ver el vídeo 3, Fracciones y porcentajes, de la serie “Ojo matemático”, producida por Yorkshire TV y distribuida en España por Metrovídeo España.
- El uso de la calculadora, en especial la calculadora científica, es muy aconsejable en esta unidad, por la elevada carga operacional que conlleva, pudiendo utilizar también la hoja de cálculo.
- En internet existen diversas páginas web donde podemos encontrar recursos interactivos sobre proporcionalidad numérica y magnitudes proporcionales:

  http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/proporcionalidad_numerica/indice.htm

  http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/Proporcionalidad_lbc/indice.htm

MAGNITUDES PROPORCIONALES

- CONCEPTOS
  - Razón o constante de proporcionalidad directa e inversa
  - Magnitudes directa o inversamente proporcionales
- PROCEDIMIENTOS
  - Repartos directos e inversos
  - Reglas de tres compuesta y simple directa e inversas
  - Porcentajes: sucesivos, aumentos, disminuciones, interés simple y compuesto

INTRODUCCIÓN

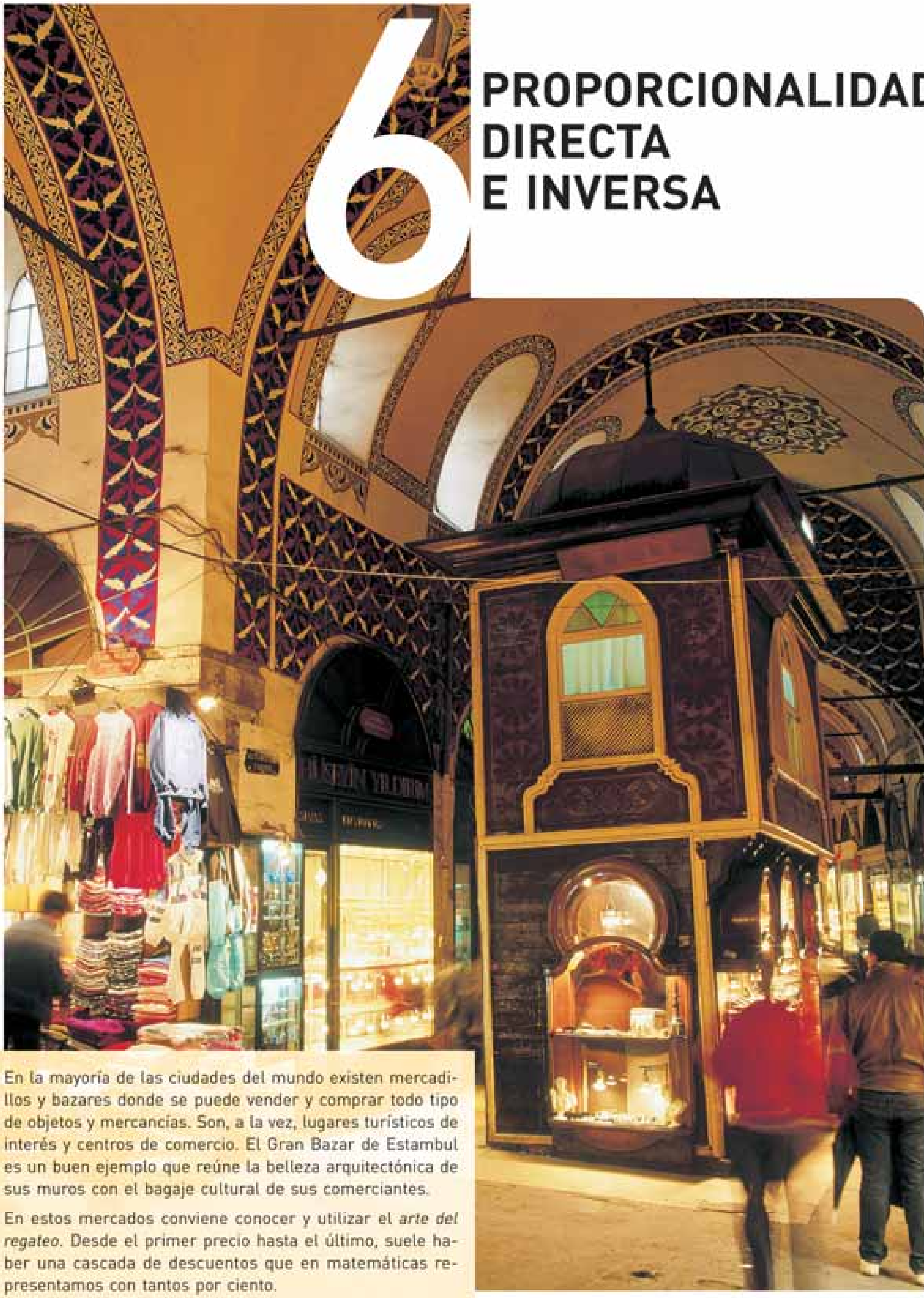
El tema comienza repasando los conceptos ya conocidos de las magnitudes directamente proporcionales y la razón o constante de proporcionalidad directa, incidiendo en el cálculo de términos desconocidos en proporciones directas como método de resolución de reglas de tres.

A continuación se introducen los porcentajes como razón entre dos magnitudes directamente proporcionales, dándole a una de ellas el valor 100, y se realizan ejercicios para el manejo de los mismos, y problemas de aumentos y disminuciones porcentuales.

Para finalizar con la proporcionalidad directa, se tratan los repartos directamente proporcionales y la aritmética mercantil básica a través del interés simple y compuesto.

La unidad concluye con un repaso de los conceptos relacionados con las magnitudes inversamente proporcionales y la constante de proporcionalidad inversa, haciendo hincapié en el cálculo de términos desconocidos en proporciones inversas y en su aplicación más práctica: el problema de la regla de tres y los repartos inversamente proporcionales.

6 PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA



En la mayoría de las ciudades del mundo existen mercadillos y bazares donde se puede vender y comprar todo tipo de objetos y mercancías. Son, a la vez, lugares turísticos de interés y centros de comercio. El Gran Bazar de Estambul es un buen ejemplo que reúne la belleza arquitectónica de sus muros con el bagaje cultural de sus comerciantes.

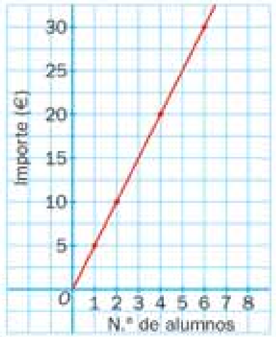
En estos mercados conviene conocer y utilizar el *arte del regateo*. Desde el primer precio hasta el último, suele haber una cascada de descuentos que en matemáticas representamos con tantos por ciento.

1. Magnitudes directamente proporcionales

Ejemplo. *Los alumnos de 4.º de ESO asisten a un musical. La entrada por persona cuesta 5 euros. ¿Depende el importe total de las entradas del número de estudiantes que asistan? ¿Cómo se relacionan el número de alumnos y el importe total?*

Sabiendo que el precio por entrada es de 5 euros, podemos confeccionar una tabla con los datos.

N.º de alumnos	1	2	4	6	...
Importe total (euros)	5	10	20	30	...



Si representamos en una gráfica la tabla de valores, observamos que obtenemos una función lineal.

Observamos que, a medida que aumenta el número de alumnos, se incrementa el importe total de las entradas.

Por otro lado, los cocientes que obtenemos al dividir las dos magnitudes son iguales.

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{4}{20} = \frac{6}{30} = 0{,}2$$

Debido a que se cumplen estas condiciones, decimos que las magnitudes *número de alumnos* e *importe total* son **directamente proporcionales**.

Dos **magnitudes** son **directamente proporcionales** cuando el cociente de las cantidades correspondientes de dichas magnitudes es constante.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \dots = r$$

A esta constante, *r*, se la llama **razón** o **constante de proporcionalidad directa**.

EJERCICIO RESUELTO

1. En una tarde soleada, Jaime, de 1,80 metros de estatura, proyecta en el suelo una sombra de 3,60 metros de longitud. ¿Qué altura tiene su casa de campo si en ese mismo instante proyecta una sombra de 34 metros?

La sombra que proyectan Jaime y su casa son directamente proporcionales a sus alturas respectivas; es decir, los cocientes entre magnitudes vendrían dados por:

$$\frac{\text{altura Jaime}}{\text{sombra Jaime}} = \frac{\text{altura casa}}{\text{sombra casa}} \Rightarrow \frac{1{,}8}{3{,}6} = \frac{x}{34} \Rightarrow x = 17 \text{ m}$$

La casa mide 17 metros de altura.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 Completa la siguiente tabla para que las magnitudes *A* y *B* sean directamente proporcionales.

A	3	10		42
B		8	18,75	

2 Cinco amigas han comprado entradas para un concierto por 75 euros. ¿Cuánto tendrían que haber pagado si hubieran comprado 16 entradas?

3 Dos amigos han obtenido la misma calificación en dos exámenes de matemáticas diferentes.

Todos los ejercicios tenían la misma puntuación y Sergio resolvió correctamente 24 de las 30 preguntas que tenía su examen.

¿Cuántos aciertos tuvo Jorge si su prueba constaba de 20 preguntas?

CONTENIDOS DEL EPÍGRAFE

- Magnitudes directamente proporcionales.
- Razón o constante de proporcionalidad directa.
- Cálculo del cuarto proporcional.

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

- Es interesante comenzar el tema haciendo notar que los conceptos son ya conocidos por los alumnos de años anteriores, y proponiéndoles que comenten qué recuerdan relacionado con las magnitudes directamente proporcionales. Se aconseja escribir en la pizarra un mapa conceptual, y, a partir de él, repasar con ellos los conceptos de razón y magnitudes directamente proporcionales con los ejemplos correspondientes.
- Es también importante calcular los términos desconocidos en las proporciones y aplicar esta técnica a la resolución de problemas de proporcionalidad directa, planteando el problema de maneras equivalentes, como pueden ser, a través de proporciones, la regla de tres o la reducción a la unidad, para que vean las distintas posibilidades de las que disponen en el planteamiento del ejercicio.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Básico

– Libro del alumno: actividades 26, 27, 49a, 50, 51a y 64.

– Número 1 de la colección de Cuadernos de Matemáticas, 4.º de ESO, *Números. Proporcionalidad*.

– Cuaderno de atención a la diversidad (refuerzo): actividad 2a.

Ampliación

– Número 1 de la colección de Cuadernos de Matemáticas, 4.º de ESO, *Números. Proporcionalidad*.

– Cuaderno de atención a la diversidad (ampliación): actividad 5 (primera parte).

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

1.

A	3	10	23,44	42
B	2,4	8	18,75	33,6

2. 240 €
3. Jorge obtuvo 16 aciertos.

Notas:

CONTENIDOS DEL EPÍGRAFE

- Obtención de un porcentaje.
- Equivalencia entre fracciones. Decimales y porcentajes.
- Cálculo de porcentajes.
- Porcentajes sucesivos.

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

- Es importante que los alumnos comprendan la equivalencia que existe entre números decimales, fracciones y porcentajes, y que adquieran soltura en las transformaciones entre ellos. Para ello, comenzaremos con ejercicios de fracciones equivalentes a otra con denominador 100, para luego extender el concepto a todo tipo de fracciones.
- El concepto de porcentaje sucesivo suele ser algo difícil de comprender por el alumnado. Es muy importante hacer hincapié en la imposibilidad de sumar o restar los porcentajes y en la comodidad de utilizar para este tipo de ejercicios los números decimales que permiten una resolución más sencilla de estos ejercicios.
- Conviene también recalcar el carácter "conmutativo" de los porcentajes sucesivos a través de ejercicios en los que se puede llegar al mismo resultado por diferentes vías. Por ejemplo, se puede utilizar una disminución porcentual (en el contexto de unas rebajas) y un aumento porcentual (añadir el IVA), y observar que es indiferente cuál de los dos se haga primero.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Básico

– Libro del alumno: actividades 32, 33, 49b, 66, 67 y 68.

– Número 1 de la colección de Cuadernos de Matemáticas, 4.º de ESO, *Números. Proporcionalidad.*

Ampliación

– Número 1 de la colección de Cuadernos de Matemáticas, 4.º de ESO, *Números. Proporcionalidad.*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

4. a) 75% b) 92% c) 18,75%
5. a) $350 \cdot (1 - 0{,}50) \cdot (1 - 0{,}10) = 350 \cdot 0{,}50 \cdot 0{,}90 = 157{,}5$ €
   b) $350 \cdot (1 - 0{,}10) \cdot (1 - 0{,}50) = 350 \cdot 0{,}90 \cdot 0{,}50 = 157{,}5$ €
   El resultado es el mismo intercambiando el proceso; no sería así si se calculase la suma de los porcentajes, es decir, el 60% de 350.
6. a) El primer incremento del precio será de $280 + 280 \cdot 0{,}10 = 308$ €.
   El segundo incremento será sobre el precio anterior: 369,6 €.
   b) $280 + 280 \cdot 0{,}30 = 364$ €

Notas:

2. PORCENTAJES. PORCENTAJES SUCESIVOS

Ejemplo. *Expresa en tantos por ciento las razones siguientes.*

a) Cuatro de cada 5 estudiantes aprueban inglés.

b) De los 25 alumnos de una clase, 15 han ido al teatro.

c) En una determinada población, 7 de cada 10 individuos tienen más de 20 años.

d) De cada 20 personas que veranean, 17 eligen el mar.

Para comparar estas razones, se pueden expresar en forma de **porcentaje**, es decir, utilizando fracciones equivalentes con denominador 100.

a) $\frac{4}{5} = \frac{80}{100} \rightarrow 80\%$ c) $\frac{7}{10} = \frac{70}{100} \rightarrow 70\%$

b) $\frac{15}{25} = \frac{60}{100} \rightarrow 60\%$ d) $\frac{17}{20} = \frac{85}{100} \rightarrow 85\%$

Los **porcentajes** expresan la razón entre dos magnitudes directamente proporcionales, dándole a una de ellas el valor 100.

Porcentajes sucesivos

Ejemplo. *En febrero, la mayoría de los comercios aplican rebajas en sus artículos. ¿Es lo mismo rebajar sucesivamente un producto que originalmente cuesta 120 euros, primero un 10% y luego un 30%, que reducirlo directamente un 40%?*

Si aplicamos directamente la rebaja del 40%, obtenemos:

$$120 - 120 \cdot \frac{40}{100} = 120 \cdot (1 - 0{,}40) = 120 \cdot 0{,}60 = 72 \text{ euros}$$

Si aplicamos primero un descuento y a continuación el siguiente:

$$120 \cdot (1 - 0{,}10) \cdot (1 - 0{,}30) = 120 \cdot 0{,}90 \cdot 0{,}70 = 75{,}60 \text{ euros}$$

No es lo mismo: al comerciante le conviene rebajar el artículo mediante porcentajes sucesivos, mientras que el cliente prefiere la rebaja aplicada de una sola vez.

EJERCICIO RESUELTO

2. Un artículo vale 120 euros. Ante la excesiva demanda por la proximidad de las fiestas navideñas, sube un 20%. Luego, cuando estas han terminado, se rebaja un 20% el precio marcado en ese momento. ¿El producto sigue valiendo lo mismo que antes de la subida?

El importe del artículo, al incrementarse el precio un 20%, es de:

$$120 + 120 \cdot 0{,}20 = 144 \text{ euros}$$

Al aplicar una rebaja del 20% sobre este importe, el nuevo precio es de:

$$144 - 144 \cdot 0{,}20 = 115{,}20 \text{ euros}$$

Ahora, su precio es inferior al que tenía inicialmente.

EJERCICIOS PROPUESTOS

4. Expresa en forma de porcentaje las siguientes fracciones.
   a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{23}{25}$ c) $\frac{12}{64}$
5. Calcula los porcentajes siguientes y explica si el proceso modifica el resultado:
   a) el 10% del 50% de 350
   b) el 50% del 10% de 350.
6. Con la llegada del calor, la venta de aparatos de aire acondicionado se ha disparado.
   El precio de lanzamiento de uno de estos productos es de 280 euros, y se ha incrementado la primera vez en un 10%, y una segunda, en un 20%. ¿Esta doble subida es equivalente a un aumento del 30%?
   Calcula, en cada caso, el importe del aparato.

Aumentos porcentuales

Ejemplo. *Un equipo de música tiene un precio marcado de 360 euros. Un cliente pregunta si está incluido el IVA, y la respuesta es que no. ¿Cuánto tendrá que pagar sabiendo que el impuesto es del 16 %?*

Cálculo del IVA: $360 \cdot \frac{16}{100} = 360 \cdot 0{,}16 = 57{,}60$ euros

Coste total del equipo de música: $360 + 57{,}60 = 417{,}60$ euros

También podríamos hacer este cálculo directamente. Aplicando el 16 % de IVA, por cada euro pagamos $1 + \frac{16}{100} = 1 + 0{,}16 = 1{,}16$ euros.

El precio final se calcula multiplicando esta cantidad por la inicial:

$$360 \cdot 1{,}16 = 417{,}60 \text{ euros}$$

RECUERDA

Un crecimiento de un x % sobre una cantidad equivale a multiplicar dicha cantidad por $1 + \frac{x}{100}$.

Un decrecimiento de un x % sobre una cantidad equivale a multiplicar dicha cantidad por $1 - \frac{x}{100}$.

Disminuciones porcentuales

Ejemplo. *Una bicicleta de montaña expuesta en un escaparate tiene una etiqueta que marca 180 euros. Junto al precio aparece un cartel que indica −25 %. ¿Cuánto cuesta la bicicleta? ¿De cuánto es el descuento?*

La expresión −25 % significa que por cada euro nos descuentan 0,25; es decir, por cada euro pagamos $1 - 0{,}25 = 0{,}75$ euros.

Para calcular el importe final de la bicicleta, multiplicamos esta cantidad por la inicial:

$$180 \cdot 0{,}75 = 135 \text{ euros}$$

El descuento aplicado es de $180 \cdot 0{,}25 = 45$ euros.

Comparación de porcentajes

Ejemplo. *En un centro escolar han aprobado 3 de cada 4 alumnos de la clase de Matemáticas, mientras que la proporción en la de Ciencias Naturales es de 8 de cada 10. Hablando en términos de porcentaje, ¿en cuál hay más aprobados? ¿Cuál es la diferencia en tanto por ciento?*

Expresado en forma de fracción, el número de aprobados en ambas clases es de $\frac{3}{4}$ en la clase de Matemáticas y de $\frac{8}{10}$ en la de Ciencias Naturales.

Una forma sencilla de comparar estas informaciones es expresarlas en forma de porcentaje.

$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0{,}75 \rightarrow$ La cantidad de aprobados en Matemáticas es del 75 %.

$\frac{8}{10} = \frac{80}{100} = 0{,}80 \rightarrow$ La cantidad de aprobados en Ciencias es del 80 %.

El balance de aprobados es un 5 % mayor en la clase de Ciencias.

EJERCICIOS PROPUESTOS

7 Teo lleva a clase una bolsa de caramelos para celebrar su cumpleaños. A la hora del recreo reparte el 80 %. Si aún le quedan 16 caramelos en la bolsa, ¿cuántos ha llevado al colegio esa mañana?

8 Una nevera cuesta 450 euros más el 16 % de IVA, pero con la rebaja aplicada en la tienda se queda en 417,60 euros. ¿Cuál es el descuento aplicado?

CONTENIDOS DEL EPÍGRAFE

- Aumentos porcentuales.
- Disminuciones porcentuales.
- Comparación de porcentajes.

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

- Es fundamental que los problemas de aumentos y disminuciones porcentuales queden perfectamente comprendidos por el alumnado, pues se trata de un concepto que no solo forma parte del currículo de la materia, sino que va a utilizar a lo largo de su vida con asiduidad. Debe, por tanto, tener suficiente soltura como para resolver el problema por diferentes técnicas y utilizar las suyas propias, facilitando así la adquisición de diversas competencias (C2, C3, C5, C7 y C8). Para ello, conviene resolver estos problemas utilizando fracciones o decimales, calculando primero el aumento o disminución, o haciendo el precio final en un único paso, razonándolo como regla de tres o como porcentaje. En definitiva, dando al alumnado todas las herramientas matemáticas disponibles para la resolución del mismo.
- Debemos prestar especial atención al cálculo de los precios iniciales, conocidos el porcentaje y el precio final, pues los alumnos tienden a aplicar el porcentaje a este último para calcular el primero. Se aconseja resolver varios ejercicios de este tipo incidiendo en que el porcentaje no se debe calcular sobre el precio final, sino a una cantidad inicial que desconocemos.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Básico

– Libro del alumno: actividad 58.
– Número 1 de la colección de Cuadernos de Matemáticas, 4.º de ESO, *Números. Proporcionalidad.*
– Cuaderno de atención a la diversidad (refuerzo): actividades 3 y 5.

Ampliación

– Libro del alumno: actividad 36.
– Número 1 de la colección de Cuadernos de Matemáticas, 4.º de ESO, *Números. Proporcionalidad.*
– Cuaderno de atención a la diversidad (ampliación): actividad 4.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

7. Teo ha llevado a clase 80 caramelos.
8. El descuento aplicado es del 20%.

Notas:

CONTENIDOS DEL EPÍGRAFE

- Repartos directamente proporcionales.

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

- Es interesante que los alumnos no se aprendan un algoritmo para resolver este tipo de problemas si realmente no lo comprenden. Para facilitar la asimilación del concepto de reparto, podemos poner ejemplos cercanos a ellos, relacionándolos con el reparto de pequeñas cantidades de dinero, y que trabajen inicialmente tanteando para obtener la solución más adecuada. Poco a poco, se les puede ir orientando hacia el algoritmo, pero siempre asegurándonos de que ven el paralelismo entre la intuición y el razonamiento matemático.
- Es importante que el tipo de problemas no se reduzca al reparto de una cantidad conocida, sino que también consigan estrategias nuevas o utilicen las ya conocidas para calcular la cantidad que hay que repartir sabiendo la parte correspondiente a uno de los integrantes del grupo. Con ello, facilitamos, además, la adquisición de la competencia para aprender a aprender (C7), y la de la autonomía e iniciativa personales (C8).

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Básico

– Libro del alumno: actividades 29, 49d, 56 y 65.

– Número 1 de la colección de Cuadernos de Matemáticas, 4.º de ESO, *Números. Proporcionalidad.*

– Cuaderno de atención a la diversidad (refuerzo): actividad 1.

Ampliación

– Número 1 de la colección de Cuadernos de Matemáticas, 4.º de ESO, *Números. Proporcionalidad.*

– Cuaderno de atención a la diversidad (ampliación): actividad 7.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

9. Carlota paga $2 \cdot 11 = 22$ €
   Marcos pagó $3 \cdot 11 = 33$ €
   Samuel pagó $5 \cdot 11 = 60$ €
10. Libros de ciencia ficción: 200
    Libros policíacos: 400
    Libros de viajes: 600

Notas:

4. Repartos directamente proporcionales

Ejemplo. *Marta, Pablo y Luisa se proponen vender 600 papeletas de una rifa con el fin de recaudar fondos para rehabilitar la Casa de la Cultura de su pueblo. Se las reparten proporcionalmente a 3, 4 y 5, respectivamente. ¿Cuántos boletos debe vender cada uno?*

Si por cada reparto, Marta recibe 3 papeletas; Pablo, 4, y Luisa, 5, el número de ellas que entran en cada distribución es de $3 + 4 + 5 = 12$.

Además, el número de repartos posibles es de $\frac{600}{12} = 50$.

Según esto:

- A Marta le corresponden $50 \cdot 3 = 150$ papeletas.
- A Pablo le corresponden $50 \cdot 4 = 200$ papeletas.
- A Luisa le corresponden $50 \cdot 5 = 250$ papeletas.

En general, si llamamos x, y y z al número de boletos que reciben Marta, Pablo y Luisa respectivamente, otra forma de resolver el problema sería planteando las ecuaciones siguientes:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{3+4+5} = \frac{600}{12} = 50 = r$$

Siendo r la razón de proporcionalidad.

Así, obtenemos el número de papeletas que recibe cada uno:

$\frac{x}{3} = 50 \Rightarrow x = 150$ papeletas recibe Marta.

$\frac{y}{4} = 50 \Rightarrow y = 200$ papeletas recibe Pablo.

$\frac{z}{5} = 50 \Rightarrow z = 250$ papeletas recibe Luisa.

Para **repartir** una cantidad C en partes **directamente proporcionales** a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se calcula la razón de proporcionalidad

$$r = \frac{C}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$$

Cada parte se obtiene multiplicando r por $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente.

EJERCICIO RESUELTO

3. Para colaborar en el viaje de fin de curso, un centro escolar reparte 1800 euros entre las tres clases de 4.º de ESO de manera proporcional al número de alumnos que se han apuntado de cada una: 24, 30 y 36, respectivamente. ¿Qué cantidad recibirá cada clase?

Las magnitudes *número de alumnos apuntados* y *cantidad de dinero asignada* por clase son directamente proporcionales.

El número total de alumnos apuntados es de $24 + 30 + 36 = 90$ alumnos.

A cada alumno le corresponden $r = \frac{1800}{90} = 20$ euros.

La clase de 24 alumnos apuntados recibirá $24 \cdot 20 = 480$ euros.
La clase de 30 alumnos apuntados recibirá $30 \cdot 20 = 600$ euros.
La clase de 36 alumnos apuntados recibirá $36 \cdot 20 = 720$ euros.

EJERCICIOS PROPUESTOS

9 En una tienda de música, Carlota ha comprado 2 CD; Marcos, 3, y Samuel, 5.
¿Cuánto pagará cada uno si todos los discos valen lo mismo y el total abonado ha sido de 110 euros?

10 En la biblioteca de un barrio hay 1200 libros de ciencia ficción, de género policíaco y de viajes.
¿Cuántos habrá de cada clase si su número es proporcional a 1, 2 y 3, respectivamente?

5. Porcentajes en la economía. Interés simple

Ejemplo. *El índice de precios al consumo (IPC) ha subido durante el pasado año un 4,5 %. ¿Cuánto costará el nuevo recibo de la luz si el importe medio del mismo año ha sido de 72 euros mensuales?*

El aumento porcentual del recibo de la luz será de $72 \cdot \frac{4,5}{100} = 3,24$ euros.

El importe mensual medio del nuevo recibo resultará de sumar esta cantidad a la media mensual anterior: $72 + 3,24 = 75,24$ euros

Ejemplo. *Un trabajador gana 1200 euros mensuales y paga a la Seguridad Social el 8 % de su sueldo. ¿Cuánto aporta a esta entidad? ¿Cuánto le queda para sus otros gastos?*

El trabajador contribuye a la Seguridad Social con el 8 % de su sueldo.

$$1200 \cdot \frac{8}{100} = 96 \text{ euros}$$

Para sus otros gastos le queda el $100\,\% - 8\,\% = 92\,\%$ de su sueldo.

$$1200 \cdot \frac{92}{100} = 1104 \text{ euros}$$

Interés simple

Ejemplo. *Mercedes deposita 9000 euros en una caja de ahorros al 6 % de interés simple anual. ¿Cuánto recibirá del banco al cabo de un año? ¿Cuánto tendrá pasados 5 años? ¿Y en 200 días?*

Al cabo de un año, ese depósito le proporcionará a Mercedes unos intereses de $9000 \cdot \frac{6}{100} = 540$ euros.

Los intereses obtenidos son directamente proporcionales a la cantidad inicial depositada, al tiempo transcurrido y al interés pactado con la entidad. Como el interés es simple anual, los intereses se retiran al final de cada año. Después de 5 años, la cantidad que tendrá en el banco será su capital inicial más los intereses generados por esa cantidad en ese tiempo:

$$9000 + 5 \cdot 540 = 11\,700 \text{ euros}$$

En 200 días, el depósito no genera todos los intereses que haría en un año; pero se pueden calcular aplicando la fracción correspondiente. La cantidad que tendrá al cabo de 200 días será de

$$9000 + 9000 \cdot \frac{6}{100} \cdot \frac{200}{360} = 9000 + 300 = 9300 \text{ euros.}$$

Si se deposita un capital inicial C_0 durante t años a un interés anual del r %, y los intereses se retiran al final de cada período, estamos en una situación de **interés simple**.

Al cabo de los t años, se producirán unos intereses de $C_0 \cdot t \cdot \frac{r}{100}$, y el **capital final**, C, será

$$C = C_0 + C_0 \cdot t \cdot \frac{r}{100} = C_0 \cdot \left(1 + t \cdot \frac{r}{100}\right)$$

Sabías que...

El IPC mide la evolución de los precios de bienes y servicios de consumo en una región. Con él se puede determinar si la economía de un país va en proceso de inflación (subida de precios) o deflación (bajada de precios), y en qué grado. También es un estimador del coste de vida.

Ten en cuenta

Aunque un año tiene 365 días, a efectos del cálculo de intereses, se considera el llamado año comercial de 360 días.

Ejercicios propuestos

11 En un banco se depositan 5000 euros al 8 % de interés simple anual.
¿Cuánto pagará el banco al cabo de 6 años? ¿Y de 9 meses? ¿Y de 108 días?

12 Un capital de 600 euros ha producido unos intereses de 240 euros al 5 % anual.
¿Cuánto tiempo ha estado el capital depositado en el banco si el interés es simple?

Contenidos del epígrafe

- Aumentos porcentuales en la economía.
- Disminuciones porcentuales en la economía.
- Interés simple.
- Obtención del capital final.

Sugerencias didácticas

- La aplicación de los aumentos y las disminuciones porcentuales al campo de la economía debe ser un elemento motivador, pues permite al alumnado realizar una aplicación de conceptos matemáticos a la vida diaria. Plantear problemas con términos económicos, como el IPC, la hipoteca, el tipo de interés, la TAE, la mensualidad o la amortización, y explicar ligeramente el funcionamiento de los mismos es una herramienta fundamental para captar la atención del grupo.
- Es importante que no solo se calcule el interés simple anual o en un número completo de años, sino que también utilicen la proporcionalidad para calcularlo en diferentes fracciones del año.
- Es también fundamental que los problemas no solo se limiten al cálculo del interés o del capital final, sino que también los datos desconocidos sean el tiempo, el rédito o el capital inicial, y que utilicen las herramientas propias del álgebra para despejar dichas incógnitas.

Atención a la diversidad

Básico

– Libro del alumno: actividades 37, 38 (primera parte), 39, 57a, 69 y 71.
– Número 1 de la colección de Cuadernos de Matemáticas, 4.º de ESO, *Números. Proporcionalidad*.
– Cuaderno de atención a la diversidad (refuerzo): actividad 4a.

Ampliación

– Libro del alumno: actividad 41 (primera parte).
– Número 1 de la colección de Cuadernos de Matemáticas, 4.º de ESO, *Números. Proporcionalidad*.

Soluciones de las actividades

11. a) Interés anual: 400 €
    b) Interés en 6 años: 2400 €
    c) Interés en 9 meses: 300 €
    d) Interés en 108 días: 120 €

12. $t = 8$ años

Notas:

CONTENIDOS DEL EPÍGRAFE

- Interés compuesto.
- Periodo de capitalización.

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

- Es fundamental que los problemas no solo se limiten al cálculo del capital final, sino que también los datos desconocidos puedan ser el interés, el tiempo, el rédito o el capital inicial, y que utilicen las herramientas propias del álgebra para hallar dichas incógnitas.
- Es importante variar el periodo de capitalización y utilizar intervalos de tiempo distintos del anual a lo largo de los ejercicios, y que el alumnado observe las diferencias entre interés simple y compuesto, valorando de manera crítica cuál es el más adecuado en cada caso.

Notas:

6. Interés compuesto

Ejemplo. *Miguel deposita en un banco 9000 euros al 6% de interés compuesto. ¿Qué capital tendrá al cabo de 5 años? ¿Y si fueran n años?*

En el **interés compuesto**, al final de cada período de tiempo se suman los intereses al capital. En este caso, el período de capitalización es de un año. Por tanto, por cada euro que Miguel tenga en el banco, el capital generado al finalizar un período será:

$$1 + 1 \cdot \frac{6}{100} = 1 + 0{,}06 = 1{,}06 \text{ euros}$$

Tras el primer año, tendrá un capital de $9000 \cdot 1{,}06 = 9540$ euros.

Tras el segundo año, su capital será:

$9540 \cdot 1{,}06 = 9000 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}06 = 9000 \cdot 1{,}06^2 = 10\,112{,}4$ euros

Tras el quinto año, el capital será: $9000 \cdot 1{,}06^5 = 12\,044{,}03$ euros

Al cabo de n años, el capital final será: $9000 \cdot 1{,}06^n$ euros

Si se deposita un capital inicial C_0 durante t años a un interés anual del r%, y al finalizar cada período no se retiran los intereses, estamos en una situación de **interés compuesto**.

El **capital final**, C, que se generará será

$$C = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

Intereses semestrales, trimestrales y mensuales

Ejemplo. *El precio de un automóvil se devalúa un 20% cada año. Si Lola se ha comprado uno que le ha costado 12000 euros, ¿cuál será su valor transcurridos 16 meses?*

El capital final se calcula aplicando la fórmula del interés compuesto, teniendo en cuenta que hablamos de una disminución porcentual y de un período de capitalización distinto al año. En este caso, tomamos como período de capitalización un mes.

$$C = 12000 \cdot \left(1 - \frac{20}{12 \cdot 100}\right)^{16} = 12\,000 \cdot 0{,}7642 = 9170{,}51 \text{ euros}$$

Transcurridos 16 meses, el importe del coche será de 9170,51 euros.

Si el período de capitalización no es un año, es decir, si los intereses no se pagan anualmente, la fórmula del interés compuesto se modifica según sea el período de pago de intereses.

Pago semestral

Al cabo de s semestres, el capital será:

$$C = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{2 \cdot 100}\right)^s$$

Pago trimestral

Al cabo de t trimestres, el capital será:

$$C = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{4 \cdot 100}\right)^t$$

Pago mensual

Al cabo de m meses, el capital será:

$$C = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{12 \cdot 100}\right)^m$$

Pago diario

Al cabo de d días, el capital será:

$$C = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{360 \cdot 100}\right)^d$$

EJERCICIOS RESUELTOS

4. Se depositan 1000 euros en una entidad bancaria al 8% de interés compuesto anual durante 10 años.

a) ¿Cuál será el capital acumulado?

b) ¿Cuál será el interés producido?

a) El capital acumulado o capital final que se generará se calcula a partir de la fórmula del interés compuesto.

$$C = 1000 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right)^{10} = 1000 \cdot 1{,}08^{10} = 2158{,}92 \text{ euros}$$

b) El interés producido será:

$$C - C_0 = 2158{,}92 - 1000 = 1158{,}92 \text{ euros}$$

5. Clara pidió un préstamo de 3000 euros en una entidad bancaria al 3% de interés compuesto anual durante 6 años.

a) ¿Cuánto tendrá que devolver al banco transcurrido ese tiempo?

b) ¿Y si salda su cuenta a los tres años y medio?

a) Transcurridos los seis años, Clara debe haber pagado los intereses completos, es decir:

$$C = 3000 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^{6} = 3000 \cdot 1{,}03^{6} = 3582{,}16 \text{ euros}$$

b) Sin embargo, si salda su cuenta pendiente a los tres años y medio, el período de capitalización se debe tomar en semestres.

$$C = 3000 \cdot \left(1 + \frac{3}{2 \cdot 100}\right)^{7} = 3000 \cdot 1{,}015^{7} = 3329{,}53 \text{ euros}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

13 Elena acaba de nacer. Sus abuelos depositan 1000 euros en una cuenta a un interés compuesto del 8%. ¿Qué cantidad habrá en la cuenta cuando Elena cumpla 18 años? ¿Por cuánto se habrá multiplicado la cantidad inicial?

14 Una ciudad tiene una población de 5423384 habitantes. Si crece cada año un 1,5%, ¿cuántos tendrá dentro de 10 años?

15 Calcula el capital final que generarán 4500 euros a un interés compuesto del 4% durante 3 años si:

a) Los intereses se pagan anualmente.

b) Los intereses se pagan semestralmente.

c) Los intereses se pagan trimestralmente.

d) Los intereses se pagan mensualmente.

e) Los intereses se pagan diariamente.

16 Un empresario pide un préstamo al 12% de interés compuesto durante 6 años. Si el capital final a devolver asciende a 850000 euros, ¿cuál habrá sido el capital prestado?

17 Una empresa deposita 300000 euros en una entidad bancaria al 10% de interés compuesto anual. Al cabo de cierto tiempo, t, retira el capital y los intereses acumulados, que son 63000 euros. Calcula el tiempo que ha estado el dinero en el banco.

18 ¿Es lo mismo un interés compuesto mensual del 1% que uno trimestral del 4%? Razónalo sobre un capital inicial de 6000 euros.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Básico

– Libro del alumno: actividades 38 (segunda parte), 57(b y c), 70 y 72.

– Número 1 de la colección de Cuadernos de Matemáticas, 4.º de ESO, *Números. Proporcionalidad*.

– Cuaderno de atención a la diversidad (refuerzo): actividad 4b.

Ampliación

– Libro del alumno: actividades 41 (segunda parte), 55, 63 y 79.

– Número 1 de la colección de Cuadernos de Matemáticas, 4.º de ESO, *Números. Proporcionalidad*.

– Cuaderno de atención a la diversidad (ampliación): actividades 1 y 6.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

13. Capital acumulado: 4000 €
    El capital se ha cuadruplicado.
14. 6 294 058,54 habitantes
15. a) Si el pago es anual, $C = 5061{,}89$ €
    b) Si el pago es semestral, $C = 5067{,}73$ €
    c) Si el pago es trimestral, $C = 5070{,}71$ €
    d) Si el pago es mensual, $C = 5072{,}72$ €
    e) Si el pago es diario, $C = 5073{,}70$ €
16. $C_0 = 758\,928{,}57$ €
17. 1 año y 11 meses
18. El capital acumulado es mayor si los intereses se abonan de forma mensual.

Notas:

CONTENIDOS DEL EPÍGRAFE

- Magnitudes inversamente proporcionales.
- Razón o constante de proporcionalidad inversa.
- Cálculo del cuarto proporcional.

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

- Al igual que se hizo con las magnitudes directamente proporcionales, es interesante comenzar el epígrafe escribiendo en la pizarra un mapa conceptual y repasando con los alumnos los conceptos básicos de razón y magnitudes inversamente proporcionales, con los ejemplos correspondientes.
- Es fundamental calcular términos desconocidos en proporciones y aplicar esta técnica a la resolución de problemas de proporcionalidad inversa, planteando el problema de maneras equivalentes, como pueden ser a través de proporciones, como regla de tres o como reducción a la unidad, para que vean las distintas posibilidades de las que disponen en el planteamiento de un ejercicio.
- Se incidirá en la diferencia entre magnitudes directa e inversamente proporcionales, y, sobre todo, en la coherencia de la solución del problema como método de comprobación intuitiva de que el procedimiento seguido ha sido el correcto.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Básico

– Libro del alumno: actividades 42, 43, 44, 49c, 51b y 73.
– Número 1 de la colección de Cuadernos de Matemáticas, 4.º de ESO, *Números. Proporcionalidad.*
– Cuaderno de atención a la diversidad (refuerzo): actividad 2b.

Ampliación

– Libro del alumno: actividad 80.
– Número 1 de la colección de Cuadernos de Matemáticas, 4.º de ESO, *Números. Proporcionalidad.*
– Cuaderno de atención a la diversidad (ampliación): actividades 2 y 5 (segunda parte).

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

19.

A	50	110	80	200	160	16
B	8	4	5	2	2,5	25

La constante de proporcionalidad k es $100 \cdot 4 = 400$.

20. Las magnitudes tiempo y velocidad son inversamente proporcionales.
La constante de proporcionalidad es 240.
El motorista tardará $240 : 120 = 2$ horas.

21. Las magnitudes vacas y días de comida son inversamente proporcionales.
La constante de proporcionalidad es 5400.
Raciones vaca/día: $120 \cdot 45 = 5400$
Debe vender 30 vacas.

7. MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Ejemplo. *Un grupo de alumnos quiere ayudar a una ONG con 360 euros. Todos van a contribuir con la misma aportación económica, pero la cantidad dependerá del número de alumnos que colabore en la recaudación. Calcula cuánto tendrá que entregar cada uno si, como máximo, hay 90 alumnos.*

Construimos una tabla que relacione el número de alumnos con la cantidad que debe aportar cada uno para conseguir los 360 euros.

N.º de alumnos	1	2	3	...	60	...	90
Aportación individual (€)	360	180	120	...	6	...	4

En esta relación, las magnitudes *número de alumnos* y *aportación individual* son **inversamente proporcionales**, ya que cumplen las siguientes características:

- Si aumenta el número de alumnos que contribuyen, disminuye la cantidad que debe aportar cada uno.
- Si disminuye el número de alumnos, aumenta su aportación.
- El producto de ambas magnitudes es una constante; en este caso, los 360 euros que quieren recaudar los alumnos.
- Si aumenta el doble, el triple..., el número de alumnos que contribuyen, disminuye a la mitad, a la tercera parte..., la cantidad de dinero que aporta cada uno.

Dos **magnitudes** son **inversamente proporcionales** cuando los productos de las cantidades correspondientes son constantes.

$$a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' = \dots = k$$

El producto de dichas cantidades, k, se denomina **constante de proporcionalidad inversa**.

EJERCICIO RESUELTO

6. Un rectángulo tiene 200 centímetros cuadrados de superficie. Calcula su altura en los casos en los que su base mida 80, 40 ó 20 centímetros. ¿Cómo son estas magnitudes?

Para hallar la altura, h, de un rectángulo, conocidas su área y su base, se utiliza la fórmula $A = b \cdot h$, donde A es el área de la figura y b su base:

$$A = b \cdot h \Rightarrow h = \frac{A}{b} \Rightarrow \begin{cases} \text{para } b = 80 \text{ cm, } h = 2{,}5 \text{ cm} \\ \text{para } b = 40 \text{ cm, } h = 5 \text{ cm} \\ \text{para } b = 20 \text{ cm, } h = 10 \text{ cm} \end{cases}$$

Las magnitudes son inversamente proporcionales.

EJERCICIOS PROPUESTOS

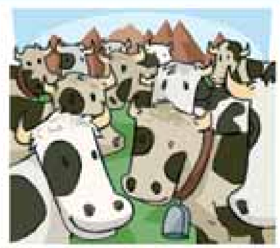
19 Completa la siguiente tabla en tu cuaderno sabiendo que las magnitudes son inversamente proporcionales. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

A	50	100	80		160	
B		4		2		25

20 Un motorista que circula a 80 km/h de velocidad media emplea 3 horas en viajar de Madrid a Burgos. ¿Cuánto tardará un automóvil si su velocidad media es de 120 km/h? ¿Cómo son las magnitudes tiempo y velocidad? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

21 Jon tiene 120 vacas, a las que puede alimentar durante 45 días.

¿Cuántas vacas debería vender para que las demás tengan alimento para 60 días?



¿Cómo son las magnitudes *número de vacas* y *días de comida*? ¿Qué valor toma la constante k?

8. Repartos inversamente proporcionales

Ejemplo. *Adela quiere repartir 2100 euros entre sus sobrinos Javier, Elena y Pablo, de manera inversamente proporcional a la edad de cada uno. Javier tiene 3 años; Elena, 5, y Pablo, 6 años. ¿Qué cantidad recibirá cada uno?*

Repartir de manera inversamente proporcional a los números 3, 5 y 6 es lo mismo que hacer ese reparto de manera directamente proporcional a las cantidades $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6}$, respectivamente.

Si k es la constante de proporcionalidad:

$$\frac{1}{3} \cdot k + \frac{1}{5} \cdot k + \frac{1}{6} \cdot k = 2100$$

Así: $\frac{21}{30} \cdot k = 2100 \Rightarrow k = 3000$

Por tanto, las cantidades que recibirán serán:

Javier: $\frac{1}{3} \cdot 3000 = 1000$ euros

Elena: $\frac{1}{5} \cdot 3000 = 600$ euros

Pablo: $\frac{1}{6} \cdot 3000 = 500$ euros

Repartir una cantidad C de forma **inversamente proporcional** a los números $x_1, x_2, \dots, x_n$ es equivalente a repartir C de manera directamente proporcional a $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$, respectivamente.

EJERCICIO RESUELTO

7. En un concurso de preguntas y respuestas, se reparte un premio de 2310 euros de manera inversamente proporcional al tiempo que han tardado en responder correctamente los tres primeros clasificados (5, 10 y 15 minutos, respectivamente). ¿Qué cantidad le corresponde a cada uno?

Primero, se calcula la constante de proporcionalidad:

$$\frac{1}{5} \cdot k + \frac{1}{10} \cdot k + \frac{1}{15} \cdot k = 2310 \Rightarrow \frac{11}{30} \cdot k = 2310 \Rightarrow k = 6300$$

Por tanto, cada concursante recibirá:

Primero: $\frac{1}{5} \cdot 6300 = 1260$ euros

Segundo: $\frac{1}{10} \cdot 6300 = 630$ euros

Tercero: $\frac{1}{15} \cdot 6300 = 420$ euros

EJERCICIOS PROPUESTOS

22 En una carrera ciclista se reparte un premio de 12600 euros entre los tres primeros corredores que llegan a la meta de forma inversamente proporcional al tiempo empleado en concluir la carrera (3, 5 y 6 horas, respectivamente). ¿Cómo queda establecido el reparto del premio?

23 A José le ha tocado la Lotería de Navidad. El premio es de 63 000 euros, y quiere repartirlo entre sus hijos de forma inversamente proporcional a sus edades, que son 20, 25, 30 y 34 años.

¿Qué cantidad recibirá cada uno?

CONTENIDOS DEL EPÍGRAFE

- Repartos inversamente proporcionales.

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

- Al igual que se hizo con los repartos directamente proporcionales, es interesante que los alumnos no se aprendan un algoritmo para resolver este tipo de problemas si realmente no lo comprenden. Para facilitar la asimilación del concepto de reparto, podemos poner ejemplos cercanos a ellos, relacionándolos con el reparto de pequeñas cantidades de dinero, y que trabajen inicialmente tanteando para obtener la solución más adecuada. Poco a poco, se les puede ir orientando hacia el algoritmo, pero siempre asegurándonos de que ven el paralelismo entre la intuición y el razonamiento matemático.
- Es importante que el tipo de problemas no se reduzca al reparto de una cantidad conocida, sino que también consigan estrategias nuevas o utilicen las ya conocidas para calcular la cantidad que hay que repartir sabiendo la parte correspondiente a uno de los integrantes del grupo. Con ello, facilitamos, además, la adquisición de la competencia para aprender a aprender (C7), y la de la autonomía e iniciativa personales (C8).

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Básico

– Libro del alumno: actividades 46, 47 y 74.
– Número 1 de la colección de Cuadernos de Matemáticas, 4.º de ESO, *Números. Proporcionalidad.*

Ampliación

– Número 1 de la colección de Cuadernos de Matemáticas, 4.º de ESO, *Números. Proporcionalidad.*
– Cuaderno de atención a la diversidad (ampliación): actividad 3.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

22. Primero: 6000 €
    Segundo: 3600 €
    Tercero: 3000 €
23. Hijo de 20 años: 21 235,96 €
    Hijo de 25 años: 16 988,76 €
    Hijo de 30 años: 14 157,30 €
    Hijo de 40 años: 10 617,98 €

Notas:

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Enfrentarse a un problema de enunciado es uno de los retos más complicados con los que se encuentran nuestros alumnos. Darles técnicas y estrategias para descomponer el problema en otros más sencillos debe ser una constante diaria en nuestra labor.

En primer lugar, deben elegir el método más adecuado para resolverlo, identificando los elementos determinantes del problema y averiguando el tipo de problema del que se trata. Discernir si son magnitudes directa o inversamente proporcionales facilita posteriormente la utilización del algoritmo adecuado para la resolución del problema.

Una vez comprendido el enunciado y descifrado el tipo de problema, se les puede sugerir que trabajen en un principio con un problema de datos más sencillos o bien con menos datos.

Cuando consigan plantear y resolver con éxito el problema simplificado, deben generalizar el proceso al problema original, trabajando bien con los datos iniciales más complejos o con más cantidad de los mismos. Es decir, si tratamos, por ejemplo, con reglas de tres, visualizaremos el problema con números más sencillos que permitan una resolución intuitiva, para posteriormente emplear el mismo razonamiento con los datos del enunciado.

Estas técnicas y estrategias en la resolución de problemas favorecen la adquisición de las competencias para aprender a aprender (C7) y de autonomía e iniciativa personales (C8), pues desarrollan en los alumnos la capacidad de autoevaluarse y de elegir diferentes caminos para afrontar problemas.

Asimismo, contribuyen a la adquisición de las competencias en comunicación lingüística (C1) y matemática (C2) al combinar ambas en la utilización del lenguaje matemático como instrumento de comunicación, interpretación y comprensión de la realidad.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

24. 20 animales $\rightarrow$ 2000 kg $\rightarrow$ 30 días
    30 animales $\rightarrow$ 2000 kg $\rightarrow$ x días $\Rightarrow x = 20$ días
    30 animales $\rightarrow$ 3500 kg $\rightarrow$ y días $\Rightarrow y = 35$ días

25. $x = \dfrac{30 \cdot 35}{42} = 25$ días

Notas:

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

DESCOMPONER EL PROBLEMA EN PEQUEÑOS PROBLEMAS

Para resolver un problema, a veces es útil dividirlo en pequeñas partes e ir resolviéndolas sin perder de vista el objetivo final.

Problema

Sabemos que dos pintores tardan seis días en pintar cuatro habitaciones. ¿Cuánto tiempo emplearían tres pintores en terminar seis habitaciones?

Resolución

Estudiamos el problema

Podemos abordar el problema utilizando una regla de tres compuesta. Pero si no estamos seguros de cómo se plantea, podemos dividir el problema en partes que sepamos resolver.

Proporcionalidad inversa   Proporcionalidad directa

2 pintores —— 6 días —— 4 habitaciones
3 pintores —— x días —— 6 habitaciones

Dividimos el problema en pequeñas partes, que resolvemos sin perder de vista el objetivo final

- ¿Cuánto tiempo tardarían los dos pintores iniciales en pintar seis habitaciones?
- Una vez que sabemos cuánto tiempo tardarían dos pintores en realizar el trabajo completo, averiguamos cuánto tiempo emplearían en hacerlo 3 pintores.

- Construimos la tabla que relaciona las dos magnitudes directamente proporcionales para el trabajo de dos pintores.

N.º de habitaciones	4	6
N.º de días	6	x

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 6}{4} = 9$$

Los dos pintores tardarían 9 días en pintar las seis habitaciones.

- Construimos la tabla que relaciona las dos magnitudes inversamente proporcionales para el trabajo de dos pintores.

N.º de pintores	2	3
N.º de días	9	x

$$2 \cdot 9 = 3 \cdot x \Rightarrow x = \frac{18}{3} = 6$$

Los tres pintores tardarían 6 días en pintar las seis habitaciones.

PROBLEMAS PROPUESTOS

24 Un ganadero sabe que para alimentar a sus 20 animales durante 30 días necesita 2 toneladas de pienso. ¿Cuántos días le durará la comida si compra 10 animales más y otros 1500 kilogramos de pienso?

25 Tres alumnos tardan 4 días en preparar seis casetas para la fiesta anual del colegio. Necesitan montar otras 5 casetas y solo disponen de 2 días más. ¿Cuántos compañeros más tendrán que ayudarles?

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Magnitudes directamente proporcionales

Son las que cumplen la relación

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \dots = r$$

Siendo r la **razón** o **constante de proporcionalidad directa**.

Repartos directamente proporcionales

Para **repartir** una cantidad C en partes **directamente proporcionales** a $x_1, x_2, \dots, x_n$, se calcula $r = \frac{C}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$.

Cada parte se obtiene multiplicando r por $x_1, x_2, \dots, x_n$, respectivamente.

PORCENTAJES

Definiciones

Porcentajes. Expresan la razón entre dos magnitudes directamente proporcionales, dándole a una de ellas el valor 100.

Porcentajes sucesivos. La aplicación sucesiva de porcentajes a una cantidad equivale al producto de los mismos.

Aumentos y disminuciones porcentuales

Un **aumento** de un x% sobre una cantidad equivale a multiplicar dicha cantidad por $1 + \frac{x}{100}$.

Una **disminución** de un x% sobre una cantidad equivale a multiplicar dicha cantidad por $1 - \frac{x}{100}$.

CÁLCULO DE INTERESES

Interés simple

Se produce cuando se deposita un capital inicial C_0 durante t años a un interés anual del r%, y los intereses se retiran al final de cada período de capitalización.

El **capital final**, C, se calcula

$$C = C_0 \cdot \left(1 + t \cdot \frac{r}{100}\right)$$

Interés compuesto

Se origina cuando se deposita un capital inicial C_0 durante t años a un interés anual del r%, y al finalizar cada período de capitalización no se retiran los intereses.

El **capital final**, C, se calcula

$$C = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

PROPORCIONALIDAD INVERSA

Magnitudes inversamente proporcionales

Son las que cumplen la relación

$$a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' = \dots = k$$

Siendo k la **constante de proporcionalidad inversa**.

Repartos inversamente proporcionales

Repartir una cantidad C de forma **inversamente proporcional** a los números $x_1, x_2, \dots, x_n$ es equivalente a hacer un reparto directamente proporcional a $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$, respectivamente.

ORGANIZA TUS IDEAS

Esta unidad se presta a realizar, de manera bastante sencilla, un guión de la misma. Por tanto, podemos sugerir a los alumnos que elaboren un mapa conceptual de la unidad que luego compararán con el del libro para comprobar si recuerdan todos los conceptos vistos en el tema.

Se indicará, además, que en dicho mapa incluyan un ejemplo tipo de cada modelo de problema para que tengan en mente los elementos que deben buscar a la hora de resolver un problema de proporcionalidad.

Notas:

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Magnitudes directamente proporcionales

26. Son directamente proporcionales las magnitudes de los apartados a y d, siendo $\frac{1}{15}$ y $\frac{1}{2\pi}$ las constantes de proporcionalidad respectivas.

27. a)

A	1	3	4	6
B	16	48	64	96

$r = \frac{1}{16}$

b)

C	27	54	81	216
D	1	2	3	8

$r = 27$

28. 57 alumnos

Repartos directamente proporcionales

29. a) $x = 20000$, $y = 24000$, $z = 16000$
    b) $x = 9000$, $y = 15000$, $z = 36000$
    c) $x = 8000$, $y = 24000$, $z = 28000$
    d) $x = 25000$, $y = 20000$, $z = 15000$
30. $x = 1$ €, $y = 2$ €, $z = 3$ €
31. En los dos casos, Ada y su hermano reciben la misma cantidad.

Porcentajes

32. a) El 40%
    b) El 88,89%
    c) El 8,33%
33. a) $0{,}18 \cdot 30 = 5{,}4$ c) $0{,}35 \cdot 90 = 29{,}5$
    b) $0{,}07 \cdot 12 = 0{,}84$ d) $0{,}86 \cdot 210 = 180{,}6$
34. a) $x = 1450$ b) $x = 16\%$ c) $x = 3040$
35. El descuento fue de 171 €.
    Si la rebaja hubiera sido del 50%, se habría descontado la mitad.
36. $x = 69{,}12\%$ es el porcentaje que han aumentado.

Cálculo de intereses

37. $C = 1200 \cdot (1 + 1 \cdot 0{,}032) = 1238{,}4$ €
    $C = 1200 \cdot (1 + 5 \cdot 0{,}032) = 1392$ €
    La cantidad acumulada entre los años 5 y 10 no es el doble de la que acumula en los 5 primeros años.
38. Interés simple: $i = 3000 \cdot 4 \cdot 0{,}06 = 720$ €
    Interés compuesto: $C = 3000\,(1 + 0{,}06)^4 = 3787{,}43 \Rightarrow i = 787{,}43$ €
    El interés acumulado en el caso compuesto es de 57,43 € más que en el simple.
39. 4%
40. a) $C = 600 \cdot (1 + 24 \cdot 0{,}006) = 600{,}144$ €
    b) $C = 600 \cdot (1 + 4 \cdot 0{,}017) = 640{,}8$ €
    c) $C = 600 \cdot (1 + 2 \cdot 0{,}025) = 630$ €
    La opción más rentable es la segunda.
41. $t = 2{,}86$ años (interés simple)
    $t = 2{,}77$ años (interés compuesto)

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Magnitudes directamente proporcionales

26 Explica cuáles de las siguientes parejas de magnitudes son directamente proporcionales.

a) El número de lados de un polígono regular de 15 centímetros de lado y su perímetro.

b) El número de prendas de ropa compradas en una tienda y el precio total de la compra.

c) La longitud de una palabra y el número de vocales que tiene.

d) El radio de una circunferencia y su longitud.

e) La edad de una persona y su peso.

f) El número de horas trabajadas durante un mes y el sueldo al final del mismo.

27 Completa las tablas siguientes sabiendo que son magnitudes directamente proporcionales y calcula su razón de proporcionalidad.

a)

A	1	3	4	
B	16			96

b)

C	27	54		216
D		2	3	

28 En todas las excursiones que realiza un determinado centro escolar, por cada alumno se pagan 1,75 euros de seguro de accidentes. Si en la última excursión el importe total fue de 99,75 euros, ¿cuántos alumnos fueron?

Repartos directamente proporcionales

29 Reparte 60 000 de forma directamente proporcional a los siguientes números.

a) 10, 12 y 8 c) 2, 6 y 7
b) 3, 5 y 12 d) 5, 4 y 3

30 Tres amigos han compuesto las 12 canciones de un CD. Uno de ellos es el autor de 2 canciones; otro, de 4, y el tercero, de las restantes. Por cada CD vendido obtendrán un beneficio de 6 euros.

¿Qué cantidad se llevará cada uno si reparten las ganancias de forma directamente proporcional al número de canciones que han compuesto?

31 Los abuelos paternos de Ada quieren repartir 180 euros entre ella y su hermano de forma proporcional a sus edades, 8 y 12 años.

Por otra parte, sus abuelos maternos distribuirán 216 euros entre sus tres nietos, también de forma proporcional a sus edades, 4, 8 y 12 años.

Si Ada es la nieta de 12 años, ¿con qué reparto obtendrá más dinero? ¿Y su hermano, que es el nieto de 8 años?

Porcentajes

32 Expresa en tantos por ciento los siguientes casos.

a) Dos de cada cinco personas dejaron de fumar en los 6 primeros meses de 2007.

b) Ocho de cada nueve encuestados duermen menos de 8 horas diarias.

c) Uno de cada doce residentes españoles colabora con una ONG.

33 Calcula los siguientes porcentajes.

a) 18% de 30 c) 35% de 90
b) 7% de 12 d) 86% de 210

34 Halla, en cada caso, el valor de la variable x.

a) El 24% de x es 348.
b) El x% de 250 es 40.
c) El 95% de 3200 es x.

35 Calcula el descuento que se ha aplicado a un artículo de liquidación que costaba 2850 euros si en la primera oferta se rebajó un 30%, y en la segunda, un 20% sobre el precio ya rebajado. Explica razonadamente si el descuento total fue del 50%.

36 Halla el aumento porcentual de los latidos del corazón de una persona que pasa de 68 a 115 pulsaciones por minuto.

Cálculo de intereses

37 Calcula el capital acumulado por un depósito de 1200 euros a un interés simple del 3,2% después de 1, 5 y 10 años.

¿La cantidad acumulada entre los 5 y 10 años es el doble que la correspondiente a los 5 primeros?

38 Halla en qué cantidad se incrementarían 3000 euros depositados en una cuenta corriente durante 4 años a un interés simple anual y a un interés compuesto anual del 6%. Compara el resultado y coméntalo.

39 Calcula el interés simple al que se han depositado 1800 euros en un banco durante un año si el capital al cabo de ese tiempo ha sido de 1872 euros.

40 Estudia, de entre las siguientes, cuál es la opción más rentable al ingresar 600 euros en una cuenta durante 2 años a un interés simple.

a) Mensual del 0,6%
b) Semestral del 1,7%
c) Anual del 2,5%

41 Halla el tiempo que han estado ingresados 2500 euros en una cuenta si han producido unos intereses de 250 euros al 3,5% anual, en los casos de que sea un interés simple o compuesto.

Magnitudes inversamente proporcionales

42 Completa las tablas siguientes sabiendo que son magnitudes inversamente proporcionales y calcula su constante de proporcionalidad.

a)

A	1	2	3	
B	330			66

b)

C		2	6	
D	84	42		12

43 Escribe tres ejemplos de dos magnitudes inversamente proporcionales y explica razonadamente por qué lo son.

44 Estudia si las magnitudes de las siguientes tablas son inversamente proporcionales.

a)

A	1	2	3	4
B	450	225	150	100

b)

C	120	60	30	15
D	2	4	8	16

45 La constante de proporcionalidad de dos magnitudes inversamente proporcionales, *A* y *B*, es 8. Calcula:

a) El valor de *A* cuando *B* es 2.

b) El valor de *B* cuando *A* es 16.

Repartos inversamente proporcionales

46 Reparte 12000 de forma inversamente proporcional a los siguientes números.

a) 2 y 6

b) 4 y 5

c) 2, 3 y 4

d) 2, 4 y 8

47 En un concurso de pintura rápida se va a repartir la cantidad de 6000 euros entre los tres primeros clasificados de manera inversamente proporcional a su lugar en la clasificación.

Calcula la cantidad que se llevará cada uno de ellos.

48 En una carrera popular participan 20 trabajadores de una misma compañía. La dirección de la empresa ha ofrecido un premio especial de 600 euros para repartir entre los cuatro primeros empleados que crucen la línea de meta. El premio lo repartirán de manera inversamente proporcional al orden de llegada.

¿Cuánto dinero obtendrá cada uno de ellos?

CUESTIONES PARA ACLARARSE

49 Explica si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes.

a) La razón de proporcionalidad es un número mayor que 1.

b) Un porcentaje equivale a una razón de denominador 100.

c) Entre magnitudes inversamente proporcionales no existe razón de proporcionalidad.

d) En un reparto proporcional a las edades de tres personas, a la mayor le corresponde la cantidad más pequeña.

50 ¿Son directamente proporcionales los kilómetros recorridos en un trayecto en autobús y el precio del billete? Razona tu respuesta.

51 Completa las siguientes frases.

a) Si *A* y *B* son directamente proporcionales, al triplicarse un valor de *A*, su valor correspondiente de *B* se ____________.

b) Si *A* y *B* son inversamente proporcionales, al dividirse entre dos un valor de *B*, el correspondiente valor de *A* se ____________.

52 Se hallan, consecutivamente, el 28 % y el 43 % de una determinada cantidad. ¿Qué único porcentaje se podría aplicar a dicha cantidad para obtener el mismo resultado?

53 Dadas dos magnitudes, al aumentar los valores de una de ellas, los correspondientes de la otra disminuyen.

¿Puede afirmarse que ambas magnitudes son inversamente proporcionales?

Razona tu respuesta y pon un ejemplo que la confirme.

54 Un arquitecto dibuja el plano de una casa a escala 1:45.

¿En qué porcentaje se han reducido las medidas reales de la casa para trazar el plano?

55 Supón que una determinada cantidad de dinero se deposita en un banco al mismo interés compuesto durante un año.

¿Qué resultará más beneficioso, un interés diario, mensual, trimestral, semestral o anual?

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Magnitudes inversamente proporcionales

42. a)

A	1	2	3	5
B	330	165	110	66

$k = 330$

b)

C	1	2	6	7
D	84	42	14	12

$k = 84$

43. La velocidad y el tiempo que tarda un coche en recorrer un espacio.
El número de obreros y el tiempo que tardan en realizar una tarea.
El número de camiones utilizados en transportar una determinada mercancía y el número de viajes que han de dar para ello.

44. a)

A	1	2	3	4
B	450	225	150	100

No son inversamente proporcionales.

b)

C	120	60	30	15
D	2	4	8	16

Son inversamente proporcionales.

45. a) $A = 4$ b) $B = 0,5$

Repartos inversamente proporcionales

46. a) 9000 y 3000
b) 6666,67 y 5333,33
c) 5538,46; 3692,31, y 2769,23
d) 6857,15; 3428,58, y 1714,29

47. Primer clasificado: 3272,73 €
Segundo clasificado: 1636,37 €
Tercero: 1090,91 €

48. Primer clasificado: 288 € Tercero: 96 €

CUESTIONES PARA ACLARARSE

49. a) Falso
b) Verdadero
c) Verdadero; existe constante.
d) Falso; le corresponde la mayor cantidad.

50. No, porque al aumentar el número de kilómetros recorridos, el precio no aumenta de forma proporcional.

51. a) Si *A* y *B* son directamente proporcionales, al triplicarse un valor de *A*, su valor correspondiente de *B* se <u>triplica</u>.
b) Si *A* y *B* son inversamente proporcionales, al dividirse entre dos un valor de *B*, el correspondiente valor de *A* se <u>duplica</u>.

52. $0,28 \cdot 0,43 = 0,1204$

53. No, si no lo hacen de forma que, al multiplicarse una de ellas por un número, la otra se divida por el mismo número. Por ejemplo, el tiempo empleado en recorrer una distancia y la velocidad si esta no es constante.

54. 2,22%

55. Mensual: $C = C_0 \cdot \left(1 + \dfrac{r}{1200}\right)^{12}$

Trimestral: $C = C_0 \cdot \left(1 + \dfrac{r}{400}\right)^{4}$

Semestral: $C = C_0 \cdot \left(1 + \dfrac{r}{200}\right)^{2}$

Por tanto, la opción más beneficiosa es la mensual.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

PROBLEMAS PARA APLICAR

56. x = 1200 €, y = 2000 €, z = 800 €
57. La más conveniente es la opción a.
58. En el primer fin de semana de julio, el porcentaje de comedias alquiladas fue mayor.
59. 2364,1 € será el presupuesto total.
    2245,90 € pagaría por la mercancía.
    4,43%
60. 370,59 km conducirá Miranda; 317,64 km conducirá Juan
    476,47 km conducirá Gabriel; 35,29 km conducirá María
61. 6894 millones de habitantes hubo en 2001.
62. $x = \frac{6 \cdot 100}{15} = 40\%$ de agua al día se gasta innecesariamente.
    40% de 6 = 2,4; 40% de 12 = 4,8
    Equivale a un gasto innecesario de agua de entre 2,4 y 4,8 L diarios.
63. 4,9%

Notas:

PROBLEMAS PARA APLICAR

56 Alicia ha estado enferma y ha necesitado cuidados durante 5 meses. Ha decidido repartir 4000 euros que tenía ahorrados entre las tres personas que la atendieron durante su convalecencia de forma directamente proporcional al tiempo que estuvieron con ella.

La primera persona la acompañó durante un mes y medio; la segunda, durante dos meses y medio, y el resto del tiempo estuvo con ella la tercera.

¿Cuánto le dará a cada una de ellas?

57 Al solicitar un préstamo de 12000 euros para comprar un coche, Lucía ha estudiado estas tres opciones.

a) El banco le ofrece un interés simple anual del 3,2%.

b) El concesionario le presenta un interés compuesto semestral del 1,5%.

c) Una empresa de dinero fácil le garantiza un interés compuesto del 2,6% anual.

Si en los tres casos saldara su deuda en 4 años, ¿qué opción sería más conveniente para Lucía?

58 En un videoclub se han alquilado 65 películas durante el primer fin de semana de julio, de las cuales 27 fueron comedias.

En el primer fin de semana de agosto se alquilaron 18 comedias de un total de 52 películas.

¿En cuál de los dos fines de semana fue mayor el porcentaje de comedias alquiladas?

59 Una empresa ha pedido presupuesto de una mercancía a un proveedor habitual. El precio real de la misma es de 2350 euros, pero el proveedor le aplicará un 20% de margen y un 3% por su transporte. ¿Cuál será el presupuesto total?

Si finalmente la empresa acepta la oferta y lo paga al contado, el proveedor le hará un descuento del 5%. ¿Cuánto pagaría finalmente la empresa por la mercancía? ¿Cuál sería el porcentaje final aplicado al precio inicial?

60 Miranda, Juan, Gabriel y María van a viajar de Madrid a París. Conducirán todos, de modo que el número de kilómetros que haga cada uno sea directamente proporcional al tiempo que hace que obtuvieron el permiso de conducir.

Miranda lo consiguió hace 7 años; Juan, 6; Gabriel, 9, y María, que es la más novata, hace 8 meses.

Si en total recorrerán 1200 kilómetros, ¿cuántos kilómetros conducirá cada uno?

61 En el año 2000, la población mundial era de 6000 millones de personas, aproximadamente.

La tasa de natalidad ese año fue del 24‰, y la tasa de mortalidad, del 9,10‰.

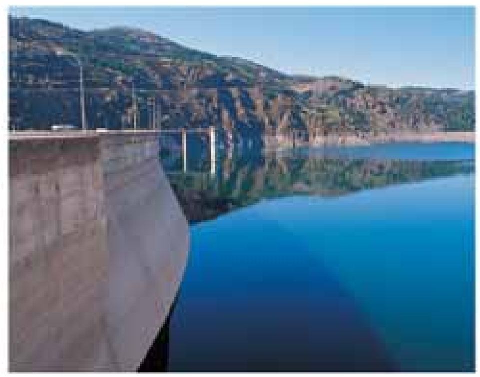
Atendiendo a estos datos, ¿cuál fue el número de habitantes en el año 2001?

62 Una de las recomendaciones para ahorrar agua es no utilizar el inodoro como cubo de basura, porque cada vez que se vacía la cisterna se consumen entre 6 y 12 litros de agua.

Javier contó el número de veces que se vacía la cisterna en su casa cada día durante una semana y obtuvo una media de 15 veces diarias, de las cuales 6 eran innecesarias.

¿Qué porcentaje de agua al día se gasta innecesariamente como media en casa de Javier?

¿Cuántos litros de agua corresponden a esa media?



63 En una entidad bancaria, Jaime y Lola han pedido un préstamo de 25000 euros que quieren pagar en 4 años. Según el interés compuesto que les ofrece el banco, al final habrán pagado 30853,36 euros.

En otro banco les garantizan el préstamo a un interés medio punto menor en el mismo tiempo.

Calcula el interés que les cobra cada una de las entidades.

REFUERZO

Magnitudes y repartos directamente proporcionales

64 Completa las siguientes tablas y calcula la razón de proporcionalidad en cada caso.

a)

Peso de las almendras (gramos)	100	300	400	
Importe (e)		37,5		100

b)

Gasolina consumida (l)		20	12	1
Distancia recorrida (km)	600	300		

65 Reparte 22000 de forma directamente proporcional a los siguientes números.

a) 4 y 6
b) 12 y 18
c) 2, 3 y 4
d) 5, 10 y 20

Porcentajes

66 Realiza los siguientes cálculos:

a) El 36 % de 1045.
b) El tanto por ciento que hay que aplicar a 84 para que se incremente en 16,8 unidades.
c) La cantidad cuyo 95 % es 513.

67 Calcula el 60 % del 35 % de 218000.

¿Se consigue el mismo resultado que si se calcula el porcentaje que se obtiene al sumar los dos anteriores? ¿Y el que resulta de multiplicarlos?

68 El presupuesto de una cocina es de 7200 euros. En la factura hay que añadir el 16 % de IVA. Del importe final, los clientes deben pagar un 40 % antes de empezar a fabricarla, y el resto, una vez terminada. ¿Qué cantidad han de pagar al finalizar el trabajo?

Cálculo de intereses

69 Calcula el interés que producen 2150 euros depositados en un banco que ofrece un 1,8 % de interés simple anual en los siguientes casos:

a) Después de 3 años.
b) Después de 4 meses.
c) Al cabo de 500 días.

70 Repite los cálculos del ejercicio anterior para el caso en que el interés sea compuesto.

71 Halla el interés simple anual que una entidad bancaria cobra por un préstamo de 3000 euros en los casos siguientes:

a) En 2 años, los intereses son de 270 euros.
b) En 5 meses, los intereses son de 23,75 euros.

72 Calcula el capital final que tendrá una persona después de 12 años al depositar 500 euros a un interés compuesto del 2,5 % anual.

Magnitudes y repartos inversamente proporcionales

73 Estudia si son inversamente proporcionales las magnitudes A y B dadas en las siguientes tablas.

a)

A	1	2	4	8
B	84	42	21	10,5

b)

A	1	3	6	9
B	180	60	30	20

74 Reparte 8500 de forma inversamente proporcional a los siguientes números.

a) 1 y 2
b) 3 y 6
c) 1, 4 y 8
d) 2, 4 y 6

AMPLIACIÓN

75 Completa las tablas conociendo la razón de proporcionalidad de las magnitudes relacionadas.

a) $r = 0,375$

x	3	
y		18

b) $r = 2,5$

x		25
y	6	

76 El 40 % del 70 % de x es 600,6. Halla x.

77 ¿Qué porcentaje hay que aplicar al 65 % de 3140 para obtener 551,07?

78 Calcula el tiempo por el que se ha contratado una oferta bancaria si por depositar 5000 euros se han obtenido unos intereses de 624,32 euros al 4 % de interés compuesto.

79 Después de 450 días a un interés compuesto del 6,2 % anual, la cantidad que figura en una cartilla de ahorros es de 2698,57 euros.

a) ¿Cuál ha sido el capital inicial?
b) ¿Qué interés hubiera sido necesario, durante el mismo tiempo, para que al final hubiera 3000 euros?
c) Si se quisiera duplicar los 2698,57 euros en la mitad de tiempo a partir de ahora, ¿qué interés debería ofrecer el banco?

80 Con el fin de obtener dinero para el viaje de fin de curso, 5 amigos deben montar unas cajas de regalos. Han tardado 4 horas en hacer 50 cajas.

Como deben montar 300 cajas y solo disponen de dos horas más, ¿cuántos compañeros más deben participar para conseguir el objetivo?

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

REFUERZO

Magnitudes y repartos directamente proporcionales

64. a)

Peso de las almendras (g)	100	300	400	800

$r = \dfrac{100}{12,5}$

b)

Gasolina consumida (L)	40	20	12	1
Distancia recorrida (km)	600	300	180	15

$r = \dfrac{1}{15}$

65. a) $x = 8800$, $y = 13\,200$
b) $x = 8800$, $y = 13\,200$
c) $x = 4888,89$, $y = 7333,33$, $z = 9777,78$
d) $x = 3142,86$, $y = 6285,71$, $z = 12\,571,43$

Porcentajes

66. a) 376,2 b) 20% c) 540

67. $0,6 \cdot 0,35 \cdot 218\,000 = 45\,780$
$0,95 \cdot 21\,800 = 20\,710$. No se obtiene el mismo resultado.
$0,6 \cdot 0,35 = 0,21$. En este caso, sí se obtiene el mismo resultado.

68. 5011,2 € habrá que pagar entonces.

Cálculo de intereses

69. a) $i = 116,1$ € b) $i = 12,9$ € c) $i = 53,01$ €

70. a) $C = 2150 \cdot \left(1 + \dfrac{1,8}{100}\right)^3 = 2268,20 \Rightarrow i = 118,2$
b) $C = 2150 \cdot \left(1 + \dfrac{1,8}{1200}\right)^4 = 2162,93 \Rightarrow i = 12,93$
c) $C = 2150 \cdot \left(1 + \dfrac{1,8}{3600}\right)^{500} = 2760,48 \Rightarrow i = 610,48$

71. a) $i = 4,5\%$ b) $i = 1,9\%$

72. 672,44 €

Magnitudes y repartos inversamente proporcionales

73. a) Son inversamente proporcionales.
b) Son inversamente proporcionales.

74. a) 5666,67 y 2833,33 c) 1545,46 y 772,73
b) 5666,67 y 2833,33 d) 4636,37; 2318,18, y 1545,46

AMPLIACIÓN

75. a)

x	3	$x = 6,75$
y	$y = 8$	18

b)

x	$x = 15$	25
y	6	$y = 10$

76. $x = 2145$

77. 27%

78. $t = 3$ años

79. a) 2496,36 € b) 14,71% c) 111,07%

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

Conseguir que los alumnos comprendan cada vez mejor la realidad social en la que se vive es una de las competencias básicas del currículo (C5: Competencia social y ciudadana), en cuya adquisición forman parte las matemáticas a través de problemas como *Subida de precios*. El hecho de que los alumnos tengan un primer contacto con el concepto de inflación, el cual es tratado habitualmente en los medios de comunicación a través de problemas como este, hace que tomen una actitud crítica y reflexiva en la valoración de la información disponible, lo cual contribuye a su vez a la adquisición de la competencia digital y el tratamiento de la información (C4).

Estudiar, antes de comenzar con su resolución, el tipo de datos que presenta el problema debe ser siempre un añadido a la hora de organizar los mismos. En este caso en particular, se puede hacer ver a los alumnos que el hecho de que el precio inicial sea 100 no es aleatorio, y que esto nos permite resolver el problema pensándolo como una regla de tres o también como un aumento porcentual.

Asimismo, el problema *Reparto justo* nos remite en su enunciado a la capacidad de elegir, de calcular riesgos y de afrontar problemas, y a la adquisición de un conjunto de valores como la responsabilidad y la perseverancia, todo ello incluido en la competencia básica relativa a la autonomía e iniciativa personales (C8). Este problema presenta inicialmente la dificultad añadida de ser un reparto que atiende a un doble criterio. Al principio, puede ocurrir que algunos alumnos se desmotiven y no acaben de leer el enunciado por completo o no lleguen a comprender. Hacer, pues, especial hincapié en que el enunciado de un problema encierra siempre todos los datos para su resolución y que estos no tienen por qué estar colocados siempre en un lugar preferente, y, por tanto, una lectura detallada hasta el final es siempre aconsejable.

Ni que decir tiene que tanto para producir como para interpretar ambos problemas, el alumno está desarrollando su competencia matemática al aplicar aquellas destrezas y actitudes que le permiten razonar matemáticamente.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

81. a)

2005	2006	2007	2008	2009
150 000	156 000	162 000	168 000	172 500

b) $650 \cdot \frac{115}{108} \approx 692$ unidades monetarias

c) Observando los cocientes:

$\frac{104}{100} = 1{,}04$; $\frac{108}{104} = 1{,}038$; $\frac{112}{108} = 1{,}037$; $\frac{115}{112} = 1{,}027$

Se aprecia que el año que sufrió una mayor alza en los precios fue 2006.

d) No se puede saber, ya que no se conocen los datos del año anterior.

82. Los corredores *A* y *B* reciben cada uno 240 euros. El *C* recibe 200 euros.

SOLUCIONES DE LA AUTOEVALUACIÓN

1. $k = \frac{5}{60}$

A	1	2	5	6
B	12	24	60	72

2. a) Son directamente proporcionales, porque $k = 3{,}5$.
   b) Son inversamente proporcionales, porque $k = 2560$.
3. a) $x = 44{,}88$ b) $x = 220$ c) $x = 36\%$
4. 716,80 € se pagan actualmente.
5. 348,50 € costará después del descuento.
6. 15 días
7. 480 € para el que lleva 2 años en la empresa.
   1440 € para el que lleva 6 años. 2880 € para el más antiguo.
8. Primero, 1800 €; segundo, 900 €, y tercero, 600 €
9. $C = 15\,060$ € recibirá Leo.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

81 Subida de precios

El Gobierno de cierto país publica la siguiente tabla de índices, con la que expresa la subida de precios de los productos de sus mercados.

2005	2006	2007	2008	2009
100	104	108	112	115

Al observar la tabla, se desprende que un artículo que en 2005 precisó 100 unidades monetarias para su compra, en 2006 necesitó 104 unidades, y en 2009 fueron necesarias 115 unidades monetarias.

a) En el año 2005, una vivienda costó 150 000 unidades monetarias. Calcula su precio en los años 2006, 2007, 2008 y 2009.

b) En 2007, un ordenador valía 650 unidades monetarias. ¿Cuánto costó uno del mismo tipo en 2009?

c) Considerando el período de 2006 a 2009, ¿en qué año de este intervalo subieron más los precios con respecto a los del año anterior?

d) ¿Consideras que en 2005 subieron mucho o poco los precios?

82 Reparto justo

En una carrera se ofrece un premio de 680 euros para repartir entre los tres primeros clasificados.

El comité organizativo ha aprobado los siguientes criterios:

- El primer clasificado debe recibir más dinero que el segundo, y el segundo, más que el tercero.
- Cuantas más horas de entrenamiento certificadas por el inspector de la carrera, mayor premio se debe recibir.

La tabla siguiente muestra el resultado de la prueba:

Corredor	Puesto	Horas certificadas de entrenamiento
A	2.º	4
B	1.º	2
C	3.º	5

Finalmente, se decide que la cantidad a recibir sea directamente proporcional al cociente entre las horas de entrenamiento y el puesto conseguido.

Calcula cuánto dinero obtendrá cada corredor y comprueba si se han cumplido los criterios aprobados por el comité.

AUTOEVALUACIÓN

1 Calcula la constante de proporcionalidad y completa la tabla correspondiente a dos magnitudes directamente proporcionales.

A	1	2	5	
B			60	72

2 Indica si las siguientes magnitudes son directa o inversamente proporcionales y calcula la constante de proporcionalidad.

a)

A	63	42	21
B	18	12	6

b)

A	160	40	20
B	16	64	128

3 Calcula *x* en los siguientes casos:

a) *x* es el 8 % del 17 % de 3300.

b) El 64 % de *x* es 140,80.

c) El *x* % de 1600 es 576.

4 Halla el importe del alquiler mensual de una vivienda por la que se pagaban 640 euros sabiendo que ha subido un 12 %.

5 ¿Cuánto costará una lavadora de 425 euros que, por ser la de exposición, se encuentra rebajada un 18 %?

6 Con 2 litros de leche, César puede alimentar a sus cachorros durante 6 días. ¿Para cuántos días tendrá comida si compra una caja de 5 litros de leche?

7 Un empresario decide repartir unos beneficios de 4800 euros entre sus tres empleados de forma directamente proporcional al tiempo que llevan trabajando en la empresa: 2, 6 y 12 años. ¿Qué cantidad le corresponderá a cada uno?

8 En un concurso de poesía se van a repartir 3300 euros entre los tres participantes con mejor puntuación. El reparto será de manera inversamente proporcional al lugar que ocupen en la clasificación. Calcula la cantidad que recibirá cada uno de ellos.

9 Leo ha prestado 15 000 euros a un amigo, el cual se los devolverá en 16 meses con un interés simple del 0,3 % anual. Halla la cantidad total que recibirá Leo.

10 Calcula el interés que producen 2800 euros a un interés compuesto del 1,6 % durante 5 años.

MURAL DE MATEMÁTICAS

GALAXIAS INVISIBLES

Los telescopios han descubierto cientos de miles de millones de galaxias en el universo más o menos brillantes. Pero ahora sabemos que, además, debe haber muchas más que apenas tienen brillo. Son las galaxias oscuras, que no tienen estrellas y están hechas de una extraña materia llamada oscura, de polvo y de gas. Son fundamentalmente de forma esférica y, al parecer, muy frecuentes alrededor de las galaxias masivas como la vía láctea.

Un grupo de investigadores de la Universidad de Zürich cree haber descubierto el origen de este tipo especial de galaxias, y sostiene que las galaxias oscuras han perdido su materia luminosa por estar en contacto con otras galaxias más masivas y se han convertido así en oscuras. El grupo de investigadores asegura haber constatado, mediante simulaciones, que existe una relación inversamente proporcional entre la cantidad de materia oscura que hay en una galaxia y el tamaño de esta. Los científicos creen que el universo contiene un número muy importante de galaxias oscuras minúsculas, que podrán verse con los telescopios que se están construyendo o planificando en la actualidad, mucho más potentes.

Terremotos lentos y duraderos

Hay terremotos tan suaves que ni se notan, y eso que pueden durar varios años. Se trata de los terremotos lentos, cuya existencia ha sido descubierta por científicos de las universidades de Tokio y de Stanford (California). Son movimientos que descargan mucha menos energía sísmica que los terremotos ordinarios, y además la liberan de forma regular y constante a lo largo de su descarga.

Por tanto, su duración es proporcional a la cantidad de energía que liberan, mientras que en los terremotos ordinarios, su duración es proporcional a la raíz cúbica del total de energía que liberan, porque tienen un pico de máxima intensidad. Estos terremotos lentos se producen en zonas de subducción, como la de la costa pacífica de Chile o la de Japón, donde una de las placas tectónicas se hunde por debajo de la otra al encontrarse. En esas mismas zonas se producen terremotos ordinarios catastróficos (con magnitudes de 8 o más en la escala de Richter), a veces superponiéndose a un terremoto lento. Aún se desconoce con precisión cómo se generan estos nuevos seísmos, aunque sus descubridores piensan que pueden deberse a la entrada y difusión de algún tipo de roca muy líquida en las fallas de la zonas de alta sismicidad.

Matetiempos

DIN A5

Al fotocopiar un papel A4 con una reducción del 71% pasa a ser un A5 (cuartilla). ¿Cuánto miden ahora su largo y su ancho? ¿En qué proporción se ha reducido su área?

MURAL DE MATEMÁTICAS

La complejidad del universo tiene en vilo a los científicos: su forma, su tamaño, su composición, su origen... En *Galaxias invisibles* nos presentan un dato más sobre este gran desconocido: la relación de proporcionalidad inversa entre la cantidad de materia oscura de una galaxia y su tamaño. El ansia del ser humano de conocer, de descubrir el porqué de todo lo que nos rodea, de conocer sus causas y consecuencias nos permite inculcar en el alumnado la adquisición de la competencia para aprender a aprender (C7) y despertar en él la curiosidad por conocer nuestros orígenes y nuestro futuro.

Mientras tanto, en *Terremotos lentos y duraderos* observamos la interdisciplinariedad de nuestra materia, al relacionarla de manera directa con la geología. Es especialmente interesante comentar en este momento la escala de Richter, de carácter logarítmico, para que relacionen que el nivel de destrucción de un terremoto no es proporcional al número que se le asigna, sino que crece de manera exponencial. Se puede encontrar una pequeña reseña a su creador, el proceso de creación de la misma y la relación con la escala de Mercalli, también utilizada para medir la magnitud de los terremotos, en la página web

http://es.wikipedia.org/wiki/Escala_sismol%C3%B3gica_de_Richter

SOLUCIÓN DEL MATETIEMPO

Un folio A4 mide 21 cm de ancho por 29,7 cm de alto. Si reducimos un 71% estas dimensiones, se transformarán en:

Ancho: $21 \cdot 0{,}71 = 14{,}9$ cm

Alto: $29{,}7 \cdot 0{,}71 = 21$ cm

El área de un folio A4 $= 21 \cdot 29{,}7 = 624$ cm^2, y el de una cuartilla A5 $= 14{,}9 \cdot 21 = 312$ cm^2. Esto quiere decir que A5 es la mitad de A4.

Notas:

Antes de comenzar cualquier actividad con la calculadora científica los alumnos deben familiarizarse con ella. Además, como es habitual que cada alumno posea un modelo distinto de calculadora, es aconsejable que, con la ayuda del manual de instrucciones, confeccionen un guión de las teclas que van a utilizar en la práctica. En esta primera actividad todos los alumnos deben investigar en la calculadora cómo acceder a la opción MODE y qué teclas deben pulsar para establecer el número de decimales en cada caso. El hecho de que los alumnos de la clase posean calculadoras de modelos distintos puede resultar instructivo, pues pueden comparar las diferentes rutinas que son necesarias para realizar una misma actividad con modelos distintos.

También hay que insistir en la necesidad de comprobar las respuestas mediante la aproximación y la estimación. Si al realizar una actividad en el aula hay distintos resultados, es aconsejable favorecer el debate y la discusión, con el fin de que los alumnos establezcan razo-nadamente por qué un resultado puede ser correcto y otro u otros no.

En principio es aconsejable que sea el profesor quien plantee diversas actividades a los alumnos, y que sean ellos mismos quienes las resuelvan con la ayuda de la calculadora científica.

- Realizar la operación $3\pi + 2\sqrt{2}$ y dar el resultado con 9 decimales, redondearlo a 4 decimales y en notación científica con 5 decimales.
- Operar $(8{,}3245 \cdot 10^{-8}) \cdot (6{,}452 \cdot 10^{5})$ y dar el resultado en notación científica.

Una vez que los alumnos hayan asimilado todos los algoritmos correctamente pueden, por parejas, plantear operaciones y que sea su compañero quien las resuelva.

En cualquier caso es aconsejable que los alumnos anoten en su cuaderno las actividades que realicen, así como sus resultados. Además, y sobretodo al principio, es aconsejable que escriban en su cuaderno las teclas que pulsan en la calculadora para hallar el resultado. En caso de que la solución de la actividad sea incorrecta podrán buscar en qué paso o pasos de la resolución se han equivocado.

Notas:

NÚMEROS CON CALCULADORA

La tecla [MODE] de la calculadora nos permite cambiar el modo de presentación de los datos en la pantalla.

En la calculadora aparece el número que hay que teclear para cambiar al modo con el que se quiere trabajar.

Modo **NORM**	Modo **FIX**	Modo **SCI**
Muestra todas las cifras decimales no nulas que puedan presentarse en pantalla.	Refleja el redondeo del número con un número fijo de cifras decimales.	Expone el número expresado en notación científica con un número de cifras determinado.
[MODE] 9	[MODE] 7 2	[MODE] 8 6
22 [ ] 35 [ ] 0,628571428	Solo presenta 2 cifras decimales. 22 [ ] 35 [ ] 0,63	Muestra el número en notación científica con 5 decimales. 22 [ ] 35 [ ] $6{,}28571 \cdot 10^{-1}$

1. *Realiza la operación $3\pi - \sqrt{3}$ en los distintos modos de la calculadora.*

En modo **Normal**:	[MODE] 9	3 [ ] [ ] [ ] 3 [√] [ ]	7,692727153
En modo **FIX** con cuatro decimales:	[MODE] 7 4	3 [ ] [ ] [ ] 3 [√] [ ]	7,6927
En modo **SCI** con tres cifras:	[MODE] 8 3	3 [ ] [ ] [ ] 3 [√] [ ]	7,69
	Secuencia de teclas para cambiar al modo deseado. Esta parte no es necesaria si la calculadora se encuentra ya en dicho modo de trabajo.	Secuencia de teclas para calcular la operación.	Distintas formas de expresar el mismo resultado de la operación.

La tecla [ ] de la calculadora nos permite introducir números expresados en forma científica para posteriormente poder operar con ellos. Primero tenemos que teclear el número decimal, después la tecla [ ] y por último el exponente de 10.

$3{,}356 \cdot 10^{12}$ → 3,356 [ ] 12 → $\boxed{3{,}356^{12}}$

Secuencia de teclas para introducir un número en notación científica.

Número en notación científica en la pantalla de la calculadora.

2. *Efectúa las siguientes operaciones en notación científica.*

a) $(3{,}2464 \cdot 10^{21}) \cdot (6{,}402 \cdot 10^{9})$ *b)* $85{,}1 \cdot (4{,}315 \cdot 10^{6})$

a) Introducimos el primer número en notación científica, la tecla [ ] y el segundo número en la misma notación:

3,2464 [ ] 21 [ ] 6,402 [ ] 9 [ ] $\boxed{2{,}07834528^{31}}$; esto es, $2{,}07834528 \cdot 10^{31}$.

b) Operando de la misma forma:

$85{,}1 \cdot (4{,}315 \cdot 10^{6}) = 85{,}1$ [ ] 4,315 [ ] 6 [ ] $\boxed{3{,}672065^{8}}$; es decir, $3{,}672065 \cdot 10^{8}$.

Para calcular potencias o raíces con la calculadora, se utilizan las siguientes teclas.

Cuadrados y raíces cuadradas — x^2 / $\sqrt{\ }$

Potencias de cualquier índice y raíces de cualquier exponente — x^y / $x^{1/y}$

Para utilizar la tecla x^2, hay que pulsar antes la tecla SHIFT.

Tanto para usar la tecla x^y como la $x^{1/y}$, es necesario pulsar antes la tecla SHIFT.

3. *Realiza estas operaciones.*

a) $7^2 + 3^5$ *b)* $\sqrt{2^3 + 5^2}$ *c)* $\sqrt[4]{3^7}$

a) 7 SHIFT x^2 + 3 SHIFT x^y 5 = 292

b) 2 SHIFT x^y 3 + 5 SHIFT x^2 = $\sqrt{\ }$ = 5,744562647

c) 3 SHIFT x^y 7 SHIFT $x^{1/y}$ 4 = 6,838521171

La tecla +/− de la calculadora nos permite introducir números negativos. Las calculadoras distinguen el signo menos que precede a los números negativos y el signo de la diferencia.

+/− Cambian el signo del número que está en la pantalla.

− Operación diferencia.

4. *Realiza estas operaciones.*

a) $(-3)^7 \cdot 5^{(-2)}$ *b)* $(1,321 \cdot 10^{-21}) : (-0,53 \cdot 10^7)$

a) 3 +/− SHIFT x^y 7 × 5 SHIFT x^y 2 +/− = $\boxed{-87,48}$; esto es, −87,48.

b) 1,321 EXP 21 +/− ÷ 0,53 +/− EXP 7 = $\boxed{-2,49245283^{-28}}$; es decir, $-2,49245283 \cdot 10^{-28}$.

Existen dos tipos de calculadoras según la forma en que se tecleen las funciones que se quieren evaluar, calculadoras en las que primero se teclea el número y después la función, y otras donde primero se introduce la expresión completa y no se evalúa hasta que se pulsa la tecla EXE, = o ENTER.

1 0 0 log = 2 log 1 0 0 ENTER 2

A C T I V I D A D E S

1. Realiza estas operaciones.

a) $4^3 \cdot \sqrt{3^5}$ b) $5^7 - 2\sqrt[3]{2^5}$ c) $\sqrt[3]{7^2} - 2^{\frac{2}{3}}$

2. Efectúa estas operaciones con números enteros.

a) $(-3)^4 \cdot \sqrt[3]{-12}$ b) $(2)^{-3} : (-5)^{-4}$ c) $\sqrt{8} : \sqrt[3]{-27}$

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

En estas actividades vuelve a ser necesario que los alumnos comprendan cómo trabaja su calculadora científica. Deben reconocer si en su calculadora se teclea primero el número y después la función, o bien si primero se introduce la expresión y después el número.

Antes de realizar cualquier actividad aquí resuelta o propuesta es necesario que los alumnos adquieran destrezas en el cálculo de potencias de base positiva y exponente positivo. Bastará con realizar un número suficiente de actividades sencillas: 3^4, 4^3, 2^3... Es aconsejable comenzar con potencias de las cuales ellos mismos conozcan el resultado y que, por tanto, sean capaces de comprobar rápidamente si la han realizado correctamente o no.

Posteriormente, se pueden realizar actividades en las que la base sea positiva y el exponente racional: $2^{\frac{1}{2}}$, $4^{\frac{2}{3}}$... Como práctica pueden realizar la actividad número 3 y comparar sus resultados con los de sus compañeros.

Una vez que los alumnos hayan automatizado todos estos algoritmos, se introducirá el cálculo de potencias de base entera negativa y exponente positivo: $(-2)^{\frac{1}{3}}$, $(-3)^4$... También se pueden plantear otras actividades como $(-2)^{\frac{1}{2}}$ y que sean ellos mismos quienes razonen por qué la calculadora da error.

En este momento los alumnos ya estarán en condiciones de realizar operaciones con potencias de base entera y exponente racional. Pueden realizar la actividad 4 y comprobar si han comprendido correctamente los algoritmos.

Finalmente, y con el propósito de relacionar todos los algoritmos y destrezas adquiridas en este epígrafe y el anterior, se puede pedir a los alumnos que expresen el resultado de la actividad 4 con un número determinado de decimales o en notación científica. De esta forma se pondrá de manifiesto si los alumnos han aprendido correctamente a operar potencias con la calculadora, y a expresar los resultados de estas operaciones de un determinado modo.

Notas:

Esta página se centra en la resolución de ecuaciones, sistemas e inecuaciones. Aunque los ejemplos y actividades propuestas se centran en los tipos de ecuaciones, sistemas o inecuaciones trabajados en las distintas unidades del libro, el proceso es el mismo para cualquier tipo de ecuación.

Es importante que los alumnos no utilicen este programa como una forma de ahorrarse los pasos intermedios necesarios para resolver la ecuación, inecuación o sistema. La utilidad de este programa reside en la rapidez con la que obtenemos las soluciones, por ello se puede emplear como un *comprobador* de que se ha resuelto bien la ecuación, sistema o inecuación.

La página se divide en tres ejemplos, el primero intenta reflejar el proceso que hay que seguir para resolver una ecuación de cualquier tipo. Hay que volver a incidir en la necesidad de comprobar si la ecuación que aparece en la ventana de álgebra es la que nosotros queremos resolver o han faltado algunos paréntesis necesarios. Muchos alumnos pueden teclear $\sqrt{}x - 7 + 1 = x$ en la barra de entrada, pero en este caso, la ecuación que entiende Derive es:

$$\sqrt{x} - 7 + 1 = x$$

Otra vía de trabajo es simplificar ambos lados de la ecuación con el botón Simplificar; por ejemplo, ecuaciones del tipo

$$\frac{3(x-1)}{4} - \frac{7x-3}{5} - 4 = 2(x-4) - \frac{3x-5}{2}$$

se simplifican a una ecuación más sencilla como:

$$\frac{-125x + 107}{20} = -x - 3$$

que podemos obligar a que los alumnos la resuelvan a mano.

El ejemplo 2 se centra en la resolución de inecuaciones de forma analítica utilizando el botón Resolver o de forma gráfica utilizando la Ventana-2D. Para la resolución gráfica es muy útil utilizar los botones de ampliación y reducción horizontal para poder localizar el intervalo en el caso de que no tenga extremos enteros.

Notas:

ECUACIONES, INECUACIONES Y SISTEMAS CON DERIVE

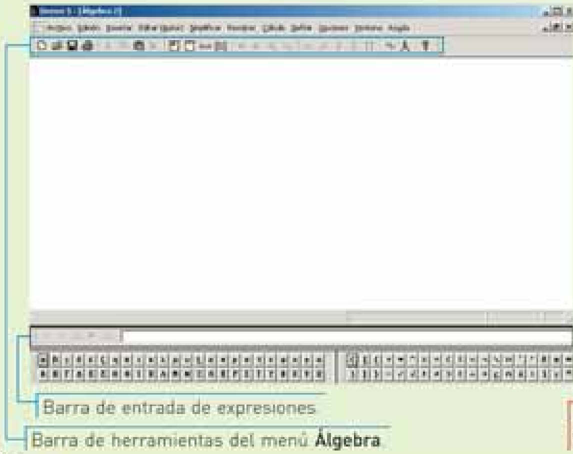
El programa Derive permite resolver ecuaciones e inecuaciones. Para ello, hay que utilizar las siguientes opciones del menú:

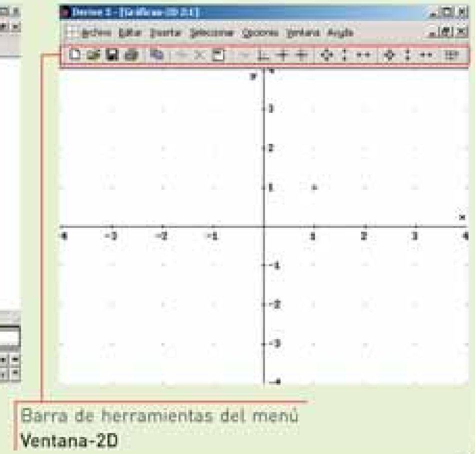
Activa la barra de entrada de expresiones para poder introducir las ecuaciones o inecuaciones que queremos resolver.

Abre la pantalla para resolver la ecuación o inecuación que está seleccionada.

Abre la **Ventana-2D.**

Representa la ecuación o inecuación seleccionada en la ventana **Álgebra**.





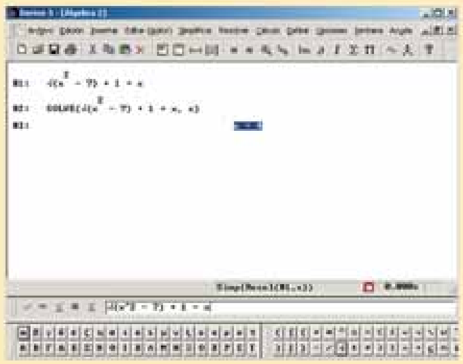
1. *Resuelve la ecuación* $\sqrt{x^2 - 7} + 1 = x$.

Activa la barra de entrada de expresiones y teclea:

$$\sqrt{}(x\text{^}2 - 7) + 1 = x$$

Abre la pantalla para resolver la ecuación y pulsa el botón **Resolver**. En la ventana algebraica aparece la solución:

$$x = 4$$



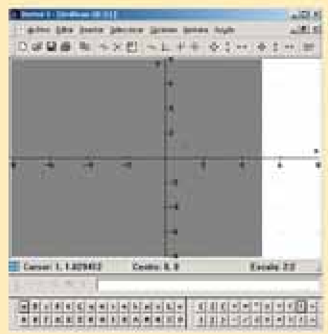
2. *Resuelve la inecuación* $\frac{3x-5}{2} - \frac{2x}{3} \leq 3 - \frac{x-1}{3}$

Activa la barra de entrada de expresiones y teclea $(3x - 5)/2 - 2x/3 \leq 3 - (x - 1)/3$.

Abre la pantalla para resolver la ecuación y pulsa el botón **Resolver**. En la ventana algebraica aparece la solución: $x \leq 5$.

Abre la **Ventana-2D**.

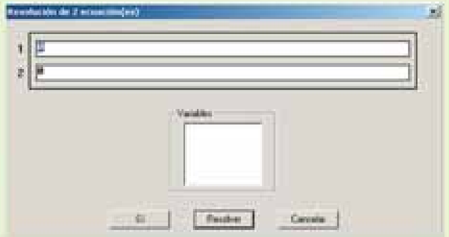
Representa la inecuación. En la **Ventana-2D** aparece la representación gráfica de la solución.



Los sistemas con Derive se resuelven realizando los siguientes pasos:

Elige **Resolver** y, posteriormente, **Sistema** en la barra de menús.

Teclea el número de ecuaciones y pulsa el botón **Sí**.



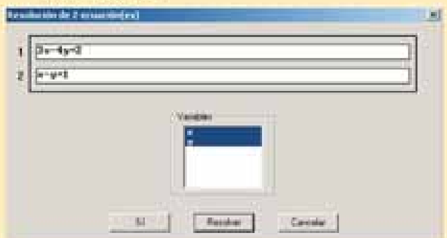
Introduce en **1** la primera ecuación del sistema, en **2** la segunda, elige las dos variables en la casilla **Variables** y pulsa el botón **Resolver**.

3. *Resuelve el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$

1.º Elige, en la barra de menús, **Resolver** y posteriormente **Sistema**.

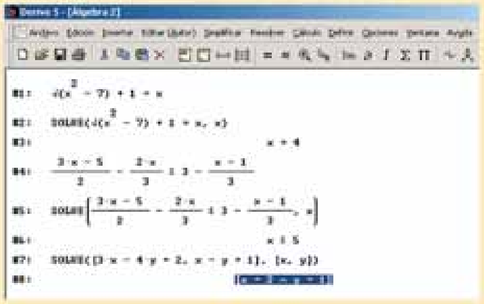
2.º Escribe **2** en el número de ecuaciones y pulsa el botón **Sí**.

3.º Introduce las dos ecuaciones y las dos variables en la pantalla **Resolución de 2 ecuación(es)**.



4.º Pulsa el botón **Resolver**. En la ventana algebraica aparece la solución:

$$[x = 2 \wedge y = 1]$$



A C T I V I D A D E S

1. Con ayuda de Derive, resuelve las siguientes ecuaciones, inecuaciones y sistemas de dos ecuaciones:

a) $x^2 - 4x - 1 = 2(1 - x)$

b) $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$

c) $\sqrt{x - 1} = x^2 - 23$

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y = 5 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

f) $\dfrac{3(x - 4)}{3} - \dfrac{1 - 3x}{2} < 2x - 5$

g) $\dfrac{3(x - 1)}{4} - 4(x + 3) \leq 0$

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

Esta página se centra en la resolución de sistemas de ecuaciones. Aunque el ejemplo resuelve un sistema no lineal, se puede utilizar con los alumnos para resolver cualquier tipo de sistema, por ejemplo, sistemas con ecuaciones lineales más complejas o sistemas en los que aparezca alguna ecuación exponencial o logarítmica.

No es necesario introducir las ecuaciones como se indica en la introducción de la página, aunque esta es la forma más intuitiva. Se puede introducir la ecuación desde la barra de entrada de expresiones, solo es necesario pulsar sobre $\wedge$ en el menú de símbolos que aparece en el extremo inferior izquierdo de la pantalla. El problema de este método es que hay que recordar elegir las dos variables después de pulsar el botón Resolver.

Las actividades propuestas hacen un repaso sobre las distintas ecuaciones, inecuaciones y sistemas que se ven en las unidades, pero como no aparecen todas, se puede proponer que los alumnos resuelvan cualquier ecuación, inecuación o sistema que aparezca en las unidades de álgebra del libro.

Notas: